

# D-branes, actions effectives et symétrie miroir

---

**Pascal Grange**

*Centre de physique théorique de l'École polytechnique,  
route de Saclay,  
91128 Palaiseau Cedex, France*  
pascal.grange@polytechnique.org

## ABSTRACT

This thesis is devoted to derivative corrections to the effective action of D-branes, and to mirror symmetry with D-branes.

Series of derivative corrections first predicted by non-commutative gauge theory are completed by couplings between the metric and the gauge field. The result is interpreted as a deformation of the non-commutative gauge theory, whose structure survives.

The derivation is applied to the tachyon field, whose potential is shown to be deformed by the very same corrections. Moreover, a prescription is given for the coupling of  $p$ -adic strings to a magnetic field, thus allowing to study  $p$ -adic solitons using non-commutative field-theory techniques.

The link with topological D-branes is provided by the non-commutative description of D-branes in the B-model. The fibre bundles supported by the D-branes are still holomorphic in this description. Establishing this property involves the realization of D-branes as boundary conditions, within the framework of generalized complex geometry.

This geometric framework is then used to describe mirror symmetry with D-branes on a Calabi-Yau manifold admitting a  $T^3$ -fibration. Two pure spinors, involved in the stability equations for topological D-branes, and modified by gauge fields, are exchanged, thus unifying Lagrangian and non-Lagrangian D-branes of the A-model as mirrors of stable holomorphic D-branes of the B-model.

30 août 2005

# Remerciements

À Ruben Minasian, qui a dirigé cette thèse, a su me guider avec bienveillance à travers les développements de la théorie des cordes et de la géométrie, m'a encouragé à diffuser mes résultats, et a réussi à faire émerger une certaine cohérence d'ensemble...

À Patrick Mora, qui m'a accueilli au Centre de physique théorique, dans des conditions de travail et une ambiance excellentes...

À Marios Petropoulos, qui coordonne le groupe de cordes et m'a permis de m'y intégrer...

Aux professeurs qui m'ont mis en contact avec la physique théorique contemporaine pendant mes études à l'École polytechnique : Christoph Kopper qui m'a expliqué les diagrammes de Feynman, et Édouard Brézin qui le premier m'a montré comment les conditions de Dirichlet interviennent en théorie des cordes...

À François Laudon et Jean Lannes, qui m'ont donné, notamment lors du séminaire des élèves, mes premières notions de topologie algébrique, que j'ai retrouvées avec fascination en abordant la théorie des cordes...

À Marcos Mariño, dont j'ai eu la chance de suivre les cours sur les cordes topologiques lors de conférences, et qui a accepté d'écrire un rapport sur cette thèse...

À Pierre Vanhove, qui a également accepté la tâche de rapporteur, après m'avoir prodigué encouragements et réponses au cours de ma thèse...

À Constantin Bachas et Massimo Porrati, dont les travaux sur les actions effectives se sont révélés si formateurs, et qui ont accepté de faire partie du jury...

À Jean-Bernard Zuber, qui m'a fait l'honneur de présider le jury, et dont le travail de lecture a été d'une redoutable précision...

À Luis Álvarez-Gaumé, qui m'a accueilli pour un stage d'un an au CERN, m'offrant ainsi une première expérience de recherche...

À Lorenzo Cornalba et Costas Kounnas, qui ont dirigé mon mémoire de DEA, et m'ont permis, avec leur enthousiasme communicatif, d'apprécier le développement de la théorie des champs non-commutatifs via la physique des D-branes...

À Christiane Gourber et Jean-Pierre Barani, dont l'enseignement a éveillé ma curiosité scientifique tout en me conférant de solides bases techniques...

À Domenico Orlando, qui a écrit la feuille de style pour cette thèse, a résolu tous les problèmes informatiques afférents, et a brillamment assuré la régie lors de la soutenance...

À Sylvain Ribault, qui a enduré la lecture de plusieurs versions préliminaires de ce texte, et suggéré tant de nécessaires améliorations avec sa pertinence habituelle...

À Claude de Calan, honnête homme dont j'ai eu le privilège de partager le bureau...

Aux camarades dont j'ai si souvent éprouvé la patience : Luciano Abreu, Stéphane Afchain, Pascalis Anastasopoulos, Guillaume Autier, David Marcos Bueno Monge, Frédéric Charvé, Julien Guyon, Xavier Lacroze, Alexey Yurievich Lokhov, Liuba Mazzanti, Chloé Papineau, Szilard Szabó, Maria-Cristina Timirgaziu, Alice-Barbara Tumpach, Yao Yijun...

À l'équipe du secrétariat et de l'informatique, dont l'efficacité souriante m'a aidé à mener à bien de nombreuses missions...

Aux organisateurs de séminaires, écoles et conférences, qui m'ont permis d'exposer mes travaux et d'apprendre davantage, en me recevant aux Houches, à Caltech, Duke, Hambourg, Porto, Princeton et Upenn...

À Mikhaël Balabane et Alain Bamberger, qui à l'École des ponts ont accepté l'idée de ce sujet de thèse, et m'ont assuré le soutien du ministère de l'Équipement...

... j'exprime ici ma gratitude.

# Chapitre 1

## Introduction : objets étendus en théorie des cordes, géométrie et dynamique

*Les cordes ouvertes s'appuient sur des membranes dites de Dirichlet, induites par les conditions de bord dans les équations du mouvement des cordes. Ces membranes sont des objets étendus, et correspondent à des charges. Nous commençons par présenter une liste de faits, décrivant tour à tour les membranes de Dirichlet comme sous-variétés de l'espace-temps (compatibles avec la T-dualité de la théorie des cordes), courants de de Rham (adaptés à l'étude des actions effectives), et charges en K-théorie (adaptées aux fibrés supportés par les D-branes, et à l'annihilation de paires de branes et d'anti-branes). Nous présentons les différentes notions géométriques dont nous aurons besoin : non-commutativité, symétrie miroir, géométrie complexe généralisée. Les motivations physiques correspondantes (non-localité, condensation de tachyons, classification des D-branes topologiques) sont annoncées.*

### 1.1 Des cordes aux D-branes

Une corde fermée est un cercle topologique, qui se propage dans l'espace-temps en engendrant une surface (sans bord) dite surface d'univers. Or les surfaces sans bord sont classifiées très simplement par leur genre. Les modes de vibration de la corde correspondent à un spectre de particules, dicté par les symétries et la cohérence interne. La théorie des cordes repose donc sur un développement topologique de la fonction de partition (amplitude vide-vide), organisé par la caractéristique d'Euler des surfaces d'univers : entre un état initial et un état final, on peut interpoler par une série de surfaces représentant les chemins possibles de la corde, les différents chemins étant pondérés par l'action de la surface d'univers. La tension de la corde (ou plutôt son inverse) est notée  $\alpha'$ , par allusion à la pente de la relation affine qui lie le spin  $J$  au carré de la masse de la plus légère des particules de spin  $J$ . La combinatoire des surfaces d'univers, grâce au caractère topologique du développement perturbatif, est beaucoup plus simple que celle des graphes de Feynman requis pour un traitement direct de la physique des particules du spectre. Dans le spectre nous trouvons notamment une métrique  $g_{\mu\nu}$ , un tenseur antisymétrique  $B_{\mu\nu}$ , et un scalaire, le dilaton  $D$ , dont l'exponentielle de la valeur moyenne, noté  $g_s$ , n'est autre que la constante de couplage.

En théorie de type IIA (resp. IIB), les fermions de Ramond (correspondant à des conditions aux limites périodiques sur la corde fermée, et possédant donc un mode de fréquence nulle mimant l'algèbre extérieure) des secteurs droit et gauche des partenaires supersymétriques

des coordonnées sur la surface d'univers, se combinent pour donner lieu à des champs de formes différentielles de degré impair (resp. pair).

Permettre une surface d'univers à *bord*, c'est inclure un secteur de cordes ouvertes [Pol96, Bac98]. Nous aurons donc affaire à des intégrales de chemin fondées sur une action classique comportant deux termes :  $S_\Sigma = \int_\Sigma \mathcal{L}_\Sigma$  intégré sur toute la surface d'univers  $\Sigma$ , qui représente le couplage à un fond de cordes fermées, et un terme intégré sur le bord,  $S_{\partial\Sigma} = \int_{\partial\Sigma} \mathcal{L}_{\partial\Sigma}$ . La fonction de partition  $Z$  s'écrira en général comme une intégrale fonctionnelle par rapport aux coordonnées  $X$  du plongement :

$$Z = \int DX e^{-S_\Sigma - S_{\partial\Sigma}}.$$

Les équations du mouvement pour la surface d'univers demandent l'annulation des variations du terme intégral bidimensionnel et du terme de bord, donnant ainsi à la fois les équations du mouvement et les conditions de bord, qui définissent les points de l'espace-temps auxquels les extrémités des cordes ouvertes sont attachées. L'ensemble de ces points forme une membrane, dite de Dirichlet, ou D-brane. En se propageant dans la direction temporelle, une D-brane de dimension  $p$ , ou  $Dp$ -brane, engendre un volume d'univers, de dimension  $p + 1$ .

Un tel objet possède une tension, il représente une certaine concentration d'énergie. Tel est le principe du point de vue dit d'espace-temps sur les D-branes : une D-brane est une solution étendue d'une certaine action effective. Les conditions de bord, qui sont à la base du point de vue de surface d'univers présenté plus haut, donnent accès à cette action sous forme d'intégrales de chemin.

La T-dualité, invariance vis-à-vis de l'inversion du rayon d'une dimension compacte, est organiquement liée au phénomène de la symétrie miroir. C'est aussi un moyen de calcul et un puissant facteur de cohérence interne : elle peut notamment être combinée à l'invariance de jauge pour contraindre les actions effectives.

## 1.2 Charges de Ramond–Ramond et champs de jauge

### Champs de formes différentielles

Comme nous l'avons vu plus haut, les secteurs de Ramond engendrent des champs de formes différentielles dans le spectre des supercordes. Or ces champs (de Ramond–Ramond) ne sont pas couplés au dilaton : leurs transformations de jauge sont simplement les changements de représentant au sein d'une classe d'équivalence en cohomologie. Ils sont donc d'essence non-perturbative. La considération de conditions de Dirichlet a culminé avec l'identification par Polchinski des D-branes comme charges de Ramond–Ramond [Pol95]. La tension d'une  $Dp$ -brane vaut

$$T_p = \frac{1}{g_s \sqrt{\alpha'}} \frac{1}{(2\pi \sqrt{\alpha'})^p},$$

qui est inversement proportionnelle à la constante de couplage  $g_s$ , ce qui signe le caractère non-perturbatif des D-branes.

## Les D-branes portent une charge en théorie des supercordes

En première approximation, les membranes de Dirichlet ne sont que des sous-variétés de l'espace-temps. Si nous prenons le point de vue de l'action effective et du couplage aux champs de formes différentielles du secteur de Ramond–Ramond, ce sont des courants de de Rham, c'est-à-dire des objets le long desquels on peut intégrer des formes différentielles. En effet, étant donné un champ de formes  $C^{(p)}$  de rang  $p$ , et un volume d'univers  $X^p$  de dimension  $p$  occupé par une D-brane, le geste naturel produisant une action consiste à intégrer le champ de formes :

$$S = \int_{X^p} C^{(p)}.$$

## Les cordes ouvertes portent des champs de jauge

Pour une pile de  $N$  D-branes nous avons un champ de jauge et un scalaire transverse, portant chacun deux indices, désignant la paire de D-branes reliées par une corde ouverte, et se transformant sous l'action du groupe de jauge  $U(N)$  :

$$(A_\mu)_i^j, (\phi^\mu)_i^j.$$

La séparation des  $N$  D-branes brise la symétrie  $U(N)$  en  $U(1)^N$ , et en particulier la théorie de jauge abélienne correspond à des conditions de bord pour les cordes ouvertes comportant une seule D-brane. Cette symétrie de jauge apparaît lorsqu'une corde ouverte s'appuie sur une D-brane : pour chaque direction *longitudinale*, nous avons un reparamétrage possible du volume d'univers de la D-brane, redondance dans laquelle on reconnaît celle des champs de jauge. En revanche, une fluctuation d'un scalaire *transverse* modifie la forme de la D-brane. La T-dualité échange directions longitudinales et transverses, champs de jauge et scalaires transverses.

Le spectre des cordes ouvertes contient donc un champ de jauge, sous lequel les extrémités des cordes ouvertes sont chargées. Ce fait induit une théorie de jauge le long du volume d'univers des D-branes. En d'autres termes le volume d'univers d'une D-brane est la base d'une structure fibrée, la fibre étant isomorphe au groupe de jauge. La courbure  $F$  du fibré est le tenseur du champ de jauge, et peut être considérée comme un champ de formes différentielles sur la base, autorisant un couplage entre le champ de jauge et des formes de Ramond–Ramond de rang faible. L'action effective comporte donc des termes couplant les champs de jauge aux potentiels de Ramond–Ramond, via des quantités topologiques, d'où leur nom de termes de Wess–Zumino ou de Chern–Simons [CS74]. Les diverses puissances permises pour  $F$  sont des composantes du caractère de Chern, et induisent des charges moins étendues à l'intérieur de la D-brane principale, Ces charges de dimension plus faible sont tenues ensemble par le champ de jauge, selon l'image mise au point par Douglas [Dou95] :

$$S = \sum_{k, p-2k \geq 0} \int_{X^p} C^{(p-2k)} \wedge \frac{1}{k!} F^k = \int_{X^p} C \wedge e^F.$$

Nous observons que l'action effective des D-branes fait apparaître des couplages entre les secteurs de cordes ouvertes et fermées. Les corrections dérivatives que nous calculerons au chapitre 3 couplent le tenseur antisymétrique  $B_{\mu\nu}$  au champ de jauge. De plus, il est manifeste que les puissances  $F^k$  issues du développement du caractère de Chern mesurent des charges

de  $D(p-2k)$  branes le long du volume d'univers de la D-brane ambiante. Elles sont nombreuses, comme les fils de la trame d'un tapis. En particulier, elles engendrent une symétrie de jauge non-abélienne, et leurs scalaires transverses ne commutent pas, même si la D-brane ambiante ne porte que des champs de jauge abéliens. Des termes mis en évidence par Myers [Mye99], couplant la  $Dp$ -brane à des champs de Ramond–Ramond de degré plus élevé, sont demandés par la symétrie de jauge et la T-dualité, et permis par une multiplication intérieure entre scalaires transverses et champs de formes différentielles :

$$S = \int (e^{[\phi, \phi]} C) \wedge e^F.$$

Ils contraignent l'inclusion des champs de jauge dans les quantités géométriques échangées par symétrie miroir en présence de D-branes, comme nous le verront au dernier chapitre. Le commutateur

$$[\phi^\mu, \phi^\nu]$$

est aux charges de  $D(p+2)$ -branes ce que le tenseur du champ de jauge  $F_{\mu\nu}$  est aux charges de  $D(p-2)$ -branes. Nous exploiterons cette conséquence de la T-dualité dans le dernier chapitre, dans l'idée d'étendre nos relations de symétrie miroir à des champs de jauge non-abéliens.

## Les charges de Ramond–Ramond ont valeur dans la K-théorie de l'espace-temps

Les charges de Ramond–Ramond ont un caractère algébrique : il doit exister des anti-branes pouvant s'annihiler mutuellement avec les D-branes. Le simple fait qu'une D-brane soit la base d'un fibré requiert donc une notion de soustraction des fibrés : une D-brane stable doit pouvoir être vue comme le résultat d'un processus d'annihilation entre une D-brane et une anti-brane. Mathématiquement, il nous faut donc une structure de groupe définie à partir de fibrés. C'est la notion de K-théorie, qui est adaptée aux charges de Ramond–Ramond, ainsi que l'ont montré Minasian et Moore [MM97]. Le caractère de Chern est un objet naturel en K-théorie. Quant au processus physique d'annihilation, il a été relié par Witten [Wit98] à la condensation de tachyons, transition de phase conjecturée par Sen, qui tient à la structure non-perturbative de la théorie des cordes.

## Le potentiel de tachyons gouverne les phases de la théorie des cordes

Certaines techniques de théorie des champs non-commutatifs donnent accès, dans des modèles simplifiés exactement solubles, à des actions effectives qui induisent une dynamique des scalaires instables vérifiant la conjecture de Sen [Sen99a]. Les D-branes possédant une mauvaise dimension en théorie des supercordes (dimension impaire en type IIA, paire en type IIB) ne correspondent pas à une charge conservée, puisqu'il n'y a pas de champ de Ramond–Ramond dont le degré lui permette de s'intégrer le long du volume d'univers avec un résultat non nul. Il en va de même pour toutes les D-branes de la théorie des cordes bosoniques. Un système brane-antibrane est également instable, et un scalaire de masse carrée négative est présent dans le spectre.

## 1.3 Géométries

La séquence d’objets mathématiques décrite ci-dessus (sous-variétés, courants de de Rham, K-théorie) est organiquement liée à la physique des cordes ouvertes (les cordes ouvertes s’appuient sur des D-branes, qui sont chargées sous les champs de Ramond–Ramond, et elles présentent des champs de jauge dans leur spectre). Toutefois, d’autres structures mathématiques peuvent être adaptées aux D-branes, de manière à pouvoir les étudier plus facilement. Disposer d’une structure supplémentaire pertinente peut en effet fournir des résultats physiques (actions effectives, conditions de stabilité) par la vertu des contraintes de cohérence interne. Les principales structures utilisées dans cette thèse sont les théories de jagues non-commutatives, les structures complexes généralisées, et les twists topologiques qui localisent la géométrie des D-branes sur les objets complexes ou symplectiques.

### Non-commutativité

#### Non-localité et objets étendus

Non-localité et non-commutativité doivent génériquement intervenir dans la dynamique des objets étendus. La notion même de point étant secondaire dans la théorie des cordes, il est naturel d’espérer une réalisation physique d’objets géométriques non-commutatifs en théorie des cordes, même dans des situations très simples. C’est en effet le cas dans une limite de la théorie des cordes, où en particulier la tension de corde tend vers zéro, avec une loi d’échelle particulière. Une partie des travaux exposés dans cette thèse vise à étendre au-delà de cette limite des résultats concernant les actions effectives. Une telle extension permet de rendre justice au caractère bidimensionnel de la surface d’univers, qui constitue une motivation géométrique de ces développements, et était pourtant atténué dans la limite considérée.

#### Algèbre des observables

Un espace peut être décrit par l’algèbre des fonctions vivant sur cet espace. Cette algèbre n’est pas en général commutative. Prendre l’algèbre des observables comme point de départ constitue le principe de la géométrie non-commutative. Les rotations en dimension supérieure à deux, la mécanique quantique, les niveaux de Landau, sont autant d’exemples d’interventions de la non-commutativité en physique, dès avant le développement de la théorie des cordes.

Nous nous limiterons à la notion la plus simple de non-commutativité, justifiable d’une description par des opérateurs de coordonnées qui ne commutent plus :

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}.$$

L’approximation du commutateur par les crochets de Poisson associés à  $\theta$  est analogue à l’approximation semi-classique de la mécanique quantique. La théorie de Yang–Mills a été étudiée par Connes, Douglas et Schwarz [CDS98] sur un tore non-commutatif. La quantification formelle et les produits non-commutatifs sont apparus dans les travaux de Chu et Ho [CH99] et d’Alekseev, Recknagel et Schomerus [ARS99, Sch99]. Les arguments de dualité en faveur d’une origine en théorie des cordes, dans une certaine limite, ont été développés par Seiberg et Witten [SW99].



## Symétrie miroir

### T-dualité

La symétrie miroir, phénomène violent et d'un intérêt considérable sur le plan mathématique puisqu'il apparie deux variétés de topologies différentes, provient d'une dualité entre théories superconformes [CDLOGP91], échangeant modules complexes et modules de Kähler. L'établissement de la symétrie miroir par des arguments physiques repose toujours sur une certaine forme de T-dualité<sup>1</sup>, fondée sur l'inversion du rayon d'une dimension compacte :

$$R \mapsto \alpha' / R.$$

Cette transformation affecte les D-branes, notamment en échangeant directions longitudinales et transverses. L'interprétation comme parité asymétrique sur la surface d'univers sera présentée au prochain chapitre. L'effet de la symétrie miroir sur les D-branes et un domaine de recherche fécond sur le plan des dualités et de la géométrie.

### Variétés de Calabi–Yau

Mes travaux en rapport avec la théorie des champs non-commutatifs supposent un espace-cible plat. Dans la suite, il sera question de variétés de Calabi–Yau de dimension complexe trois, ou plutôt de paires de telles variétés, formées par la symétrie miroir. Donnons quelques mots de motivation pour cette géométrie de Calabi–Yau. Les conditions de cohérence interne et de symétrie (invariance relativiste, symétrie conforme, supersymétrie), donnent lieu, et c'est là un trait tout à fait remarquable de la théorie des cordes, à des contraintes sur la géométrie de l'espace-temps, à commencer par la dimension critique, 26 pour les cordes bosoniques et 10 pour les supercordes. Le cahier des charges à remplir par une variété riemannienne<sup>2</sup> pour permettre la propagation des cordes et une physique d'espace-temps supersymétrique, comprend la condition de Kähler et la condition de Calabi–Yau. Une variété de Calabi–Yau est une variété complexe de Kähler, admettant une métrique plate au sens de Ricci. La conjecture de Calabi, démontrée par Yau, est un théorème d'existence pour une telle métrique sur une variété complexe de Kähler  $X$ , moyennant la condition topologique d'annulation de la première classe de Chern :

$$[c_1(X)] = 0.$$

Il suffit donc de calculer un invariant topologique pour décider si la condition est ou non vérifiée, ce qui est considérablement plus simple que la résolution de l'équation différentielle qu'est la condition de Ricci. On peut caractériser l'annulation de la première classe de Chern par l'existence d'une forme différentielle holomorphe de degré maximum sur  $X$ .

Les travaux présentés dans le chapitre sur le comportement des D-branes sous la symétrie miroir supposent un espace-cible de dimension complexe trois vérifiant la condition de Calabi–Yau. La dimension complexe trois, naturelle pour la compactification des supercordes, est de

---

<sup>1</sup>T est mis pour *target space* ; l'expression symétrie miroir sera souvent employée en lieu et place du nom de T-dualité, surtout dans le contexte des cordes topologiques. Le mot miroir fait référence à une symétrie par réflexion du tableau de Hodge qui code les dimensions des cohomologies complexes des variétés échangées par symétrie miroir. L'argument de Strominger, Yau et Zaslow justifiant cette assimilation sera passé en revue au chapitre 7.

<sup>2</sup>Le graviton faisant partie du spectre de masse nulle des cordes fermées, nous héritons d'une métrique sur l'espace-cible

plus critique pour le couplage à la gravité topologique [Wit88], qui consiste à intégrer sur l'espace de toutes les métriques permises.

## Localisation et D-branes topologiques

Les versions topologiques de la théorie des cordes permettent d'étudier séparément certains faits géométriques. C'est le principe de la localisation. On espère que les D-branes topologiques, moyennant une condition de stabilité, correspondent à d'authentiques objets étendus de la théorie des cordes. Dans le contexte de la symétrie miroir, reliant deux versions topologiques A et B, le modèle A est sensible à la géométrie symplectique (via des D-branes lagrangiennes ou coisotropes), et le modèle B à la géométrie complexe (via des D-branes équipées de fibrés holomorphes).

Il y a une notion de stabilité, développée en géométrie pour les fibrés [Leu93], et réalisée ensuite en théorie des cordes [MT02] comme une condition de supersymétrie sur les solitons (objets étendus concentrant de l'énergie) que sont les D-branes. Cette approche d'espace-temps utilise une action effective et a conduit aux équations de Mariño, Minasian, Moore et Strominger [MMMS00], dont nous donnerons une version non-commutative en utilisant une approche de surface d'univers.

## La géométrie complexe généralisée

Introduite par Hitchin [Hit03], la géométrie complexe généralisée est adaptée aux théories supersymétriques  $\mathcal{N} = (2, 2)$ . Un modèle sigma non-linéaire supersymétrique  $\mathcal{N} = 1$  peut en effet avoir une seconde supersymétrie, linéairement indépendante de la première, pourvu que l'espace-cible possède deux structures complexes donnant lieu à deux structures hermitiennes. De plus, si les champs de fond sont indépendants de certaines des coordonnées, au nombre de  $d$ , alors l'action effective hérite d'une action du groupe d'isométries  $O(d, d)$  [MV91]. Deux copies de l'algèbre superconforme sont alors disponibles.

Les développements récents de la géométrie complexe généralisée permettent d'unifier les deux modèles A et B comme deux cas particuliers d'une structure vivant sur la somme de l'espace tangent et de l'espace cotangent. L'ambition de cette généralisation consiste en une interpolation entre les twists topologiques A et B. Il s'est avéré que des techniques de surface d'univers permettent d'obtenir des objets étendus en imposant des conditions de bord à un espace dédoublé.

## 1.4 Plan de ce mémoire

J'ai donc présenté les différents personnages qui ont animé mes travaux. Le fil conducteur de cette thèse consiste en une réalisation de différentes géométries par des conditions de bord sur la surface d'univers. Nous aurons donc affaire à différents appariements entre des objets géométriques et des propriétés des D-branes : non-commutativité et action du champ de jauge, non-commutativité et potentiel de tachyons, géométrie complexe généralisée et B-

branes topologiques non-commutatives, spineurs purs et symétrie miroir.

Le chapitre 2 sera consacré à l'étude des conditions de bord définissant les D-branes. Nous mettrons progressivement en place les outils utilisés dans la suite. Nous discuterons des propagateurs pour les champs de coordonnées sur la surface d'univers, en présence d'une D-brane placée dans un espace plat dans lequel règne un champ de fond antisymétrique. Les cordes et D-branes topologiques seront ensuite présentées, avec une illustration transparente des propriétés de localisation complexe et symplectique évoquées plus haut. La symétrie miroir sera illustrée sur l'exemple simple de la T-dualité le long d'un cercle sur le tore  $T^2$ , et l'inclusion d'un champ antisymétrique complexifiant la forme de Kähler apparaîtra naturellement.

La théorie de jauge non-commutative est présentée au chapitre 3, avec son origine en théorie des cordes. Afin de motiver mes travaux sur les actions effectives (qui font l'objet du chapitre 4), j'illustrerai le fait que les actions effectives de cordes ouvertes peuvent s'écrire de beaucoup de manières. La versatilité de ces expressions devient un moyen de calcul, via le fait que l'expression non-commutative est sévèrement contrainte par la richesse même de sa structure. Le lien intime entre les champs de Ramond–Ramond et la redéfinition des champs de jauge de la théorie non-commutative abélienne de Yang–Mills, ou transformation de Seiberg–Witten, invite à penser que les D-branes topologiques doivent être justiciables de certaines techniques de théorie de jauge non-commutative. Cette analogie avec les couplages de Ramond–Ramond se retrouvera au dernier chapitre avec nos spineurs purs modifiés, et sera rendue plus naturelle par la géométrie complexe généralisée.

Au chapitre 4, je confirmerai les corrections dérivatives dictées par la non-commutativité, en effectuant un calcul d'intégrales de chemin en théorie *commutative* des cordes. Je prolongerai ensuite ces prédictions au-delà de la limite, dite de Seiberg–Witten, dans laquelle elles ont été faites. Le fait de ne pas avoir utilisé d'argument d'invariance de jauge non-commutative dans les calculs permettra *in fine* de prolonger la notion de théorie de jauge non-commutative au-delà de la limite de Seiberg–Witten sur le volume d'univers de la D-brane.

Le chapitre 5 concernera les actions effectives des champs de tachyons. La non-commutativité est prise en compte a priori en K-théorie, puisque la K-théorie de l'algèbre des fonctions sur un espace est encore une notion bien définie si l'algèbre n'est pas commutative. Je débute le chapitre par un exposé sur la robustesse du produit de Moyal vis-à-vis de l'altération qui conduit au modèle exactement soluble des cordes  $p$ -adiques. La condensation de tachyons dans la théorie ordinaire (archimédienne) est bien sûr une motivation cruciale dans le développement de ce modèle simplifié. Des tests de la conjecture de Sen ont été effectués [KMM00b, KMM00a, Cor01, Oku01], souvent dans la limite de Seiberg–Witten, et l'interprétation en termes de tachyons non-commutatifs [DMR00] reliée à la théorie des champs de cordes [Wit00, Wit01]. L'universalité du potentiel de tachyons semble survivre au-delà de la limite de Seiberg–Witten, en conséquence assez immédiate (et heureuse) des calculs du chapitre 3. L'objet naturel codant simultanément les champs couplés au bord dans les chapitres 3 et 4 est une superconnexion. Je reprendrai des propositions antérieures à cette thèse pour l'écriture des actions effectives en termes de superconnexions, et j'argumenterai en leur faveur à l'aide des corrections d'ordre élevé calculées au cours de cette thèse.

La géométrie complexe généralisée sera introduite *in situ* au chapitre 5, dans une fécondation croisée avec la non-commutativité ; elle permettra d’obtenir une notion de fibré stable holomorphe non-commutatif, qui avait été conjecturée en 1999 dans l’approche d’espace-temps. Je donnerai à la fin de ce chapitre quelques notions plus formelles sur cette géométrie, d’après Hitchin et Gualtieri. Les spineurs dits purs, vides d’une algèbre de Clifford naturelle impliquant champs de vecteurs et formes différentielles, peuvent appartenir soit au domaine symplectique du modèle A, comme l’exponentielle de la forme de Kähler, soit au domaine complexe du modèle B, comme la trois-forme holomorphe.

Ces notions, et en particulier celle de spineur pur, nous serviront à calculer au chapitre 6 les modifications par les D-branes de la formule de symétrie miroir qui échange la trois-forme holomorphe et l’exponentielle de la forme de Kähler ; nous supposerons l’existence d’une fibration en tores  $T^3$ , et nous expliquerons comment la symétrie miroir peut être identifiée à une T-dualité de long des fibres. Nous terminerons ce chapitre par quelques spéculations sur la notion de K-théorie adaptée à la géométrie complexe généralisée. Les projets de recherche associés sont énumérés et motivés dans le dernier chapitre.

La table suivante indique quelles notions sont abordées dans les différents chapitres, afin de permettre au lecteur de choisir un fil conducteur.

	Non-commutativité	D-branes	Tachyons	Symétrie miroir	Spineurs purs
Ch. 1	*	*	*	*	*
Ch. 2		*		*	
Ch. 3	*	*			
Ch. 4	*	*			
Ch. 5	*	*	*		
Ch. 6	*	*			*
Ch. 7		*		*	*

TAB. 1.1 – Thèmes abordés



## Chapitre 2

# Des conditions de bord aux D-branes topologiques

*Les conditions de bord donnant lieu à des D-branes sont présentées. Les deux thèmes qui seront étudiés dans cette thèse, à savoir les actions effectives induites par le spectre de cordes ouvertes le long du volume d'univers d'une D-brane, et les D-branes topologiques, sont abordés. La symétrie miroir relie les deux différents twists topologiques.*

### 2.1 Les D-branes sont requises par la T-dualité

Nous allons effectuer quelques calculs pour acclimater différents aspects de la T-dualité qui seront utiles au cours de ce mémoire. Pour une introduction plus systématique, le lecteur pourra consulter les références [GPR94, Pol98]. Tout d'abord un calcul des variations de l'aire d'une surface d'univers avec bord donnera les équations du mouvement pour les coordonnées du plongement, avec les conditions de bord définissant les D-branes comme le lieu sur lequel le bord des surfaces d'univers (les extrémités des cordes ouvertes) peuvent s'appuyer. Puis l'évaluation de la fonction de partition d'une corde fermée, avec pour espace-cible un cercle, rendra manifeste la symétrie par inversion du rayon de compactification ; ce sera le premier exemple de T-dualité. L'impulsion du centre de masse et le nombre d'enroulement seront échangés, ce qui pour les D-branes induira l'échange des directions longitudinales et transverses par T-dualité. Cette transformation est également une parité asymétrique sur la surface d'univers, agissant sur le secteur droit des coordonnées. Passant à un tore  $T^2$ , nous aurons une structure complexe et une forme de Kähler, échangées par T-dualité, première indication de la symétrie miroir. Une présentation approfondie des liens physiques et géométriques entre T-dualité et symétrie miroir se trouve dans le volume dirigé par Hori et ses collaborateurs [ee03].

#### Conditions de Neumann et de Dirichlet

Envoyons la surface d'univers (à bord)  $\Sigma$  d'une corde ouverte dans un espace plat  $\mathbf{R}^d$  ; nous allons discuter de la partie bosonique de l'action de surface d'univers :

$$S := \int_{\Sigma} d^2\sigma \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial^{\alpha} X_{\mu},$$

$$X^{\mu} : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^d.$$

L'équation du mouvement obtenue en demandant la stationnarité vis-à-vis d'une variation infinitésimale  $\delta X^\mu$  des scalaires dans l'intérieur de la surface d'univers est l'équation de Klein-Gordon pour un champ scalaire sans masse. Quant aux variations portées par le bord, elles donnent lieu via le théorème de Stokes à la condition de bord

$$\delta X_\mu \partial_n X^\mu|_{\partial\Sigma} = 0,$$

dans laquelle le symbole  $\partial_n$  désigne la dérivée dans la direction normale au bord de la surface d'univers. Dans chaque direction  $\mu$  de l'espace-cible, nous avons le choix pour le champ scalaire porté par le bord entre une condition de Neumann

$$\partial_n X^\mu|_{\partial\Sigma} = 0,$$

et une condition de Dirichlet

$$\delta X^\mu|_{\partial\Sigma} = 0.$$

Autrement dit, le bord de la surface d'univers peut s'appuyer sur un sous-espace de l'espace-cible, engendré par les directions selon lesquelles une condition de Neumann a été choisie. Les directions normales à cet espace sont celles selon lesquelles une condition de Dirichlet a été choisie. Ce sous-espace est naturellement appelé membrane de Dirichlet, ou D-brane, ou  $Dp$ -brane en signalant sa dimension  $p$  (égale au nombre de conditions de Neumann).

En munissant la surface d'univers de coordonnées complexes  $\sigma \pm i\tau$ , où  $\sigma$  désigne l'abscisse curviligne le long de la corde ouverte, et  $\tau$  la direction temporelle, nous arrivons à la forme qui s'adaptera à l'inclusion des champs de jauge sur l'espace tangent à la D-brane :

$$\partial X^\mu = +\bar{\partial} X^\mu (\text{direction tangente ou de Neumann}),$$

$$\partial X^\mu = -\bar{\partial} X^\mu (\text{direction normale ou de Dirichlet}).$$

Nous écrirons les conditions de bord à l'aide d'une matrice dite de réflexion notée  $R$  :

$$\partial X = R(\bar{\partial} X).$$

Le sous-espace propre de  $R$  associé à la valeur propre  $-1$  déterminera le fibré normal à la D-brane. Les directions tangentes portent à la fois le fibré tangent et le fibré principal correspondant à la théorie de jauge. Nous verrons comment la métrique et les champs de jauge sont mélangés par la matrice de réflexion.

## Un cercle pour espace-cible : inversion du rayon

Compactifions l'une des dimensions de l'espace-cible. Pour simplifier les notations, nous pouvons aussi bien ignorer les autres dimensions, et considérer un cercle  $S^1$  de rayon  $R$  comme l'espace-cible. Le champ de coordonnées est donc simplement un scalaire périodique de période  $R$  :

$$X : \Sigma \mapsto S^1.$$

Nous considérons des cordes fermées. Il y a un double effet topologique dans cette description<sup>1</sup>. Ainsi, dans le développement du champ de coordonnées, scindé en parties droite et gauche

---

<sup>1</sup>le calcul est effectué dans des unités telles que  $\alpha' = 1$ .

$$\begin{aligned}
X(\sigma, \tau) &= X(\tau - \sigma) + \tilde{X}(\tau + \sigma), \\
X(\tau - \sigma) &= \frac{x_0}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} p_0(\tau - \sigma) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n e^{-in(\tau - \sigma)}, \\
\tilde{X}(\tau + \sigma) &= \frac{x_0}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{p}_0(\tau + \sigma) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n e^{-in(\tau + \sigma)}, \\
p_0 &= \frac{m}{R} - wR, \quad \tilde{p}_0 = \frac{m}{R} + wR,
\end{aligned}$$

deux entiers apparaissent : l'un, noté  $m$ , quantifie la quantité de mouvement du centre de masse en unités  $R^{-1}$ , de manière à assurer le caractère monovalué des ondes planes, et l'autre, noté  $w$ , quantifie l'enroulement de la corde fermée autour du cercle cible en unités  $R$ , puisque deux coordonnées différant d'un multiple de  $R$  sont identifiées.

La propagation de la corde fermée dans une amplitude vide-vide identifie deux extrémités d'un cylindre (ayant pour longueur la durée de propagation  $\tau_1$ ), après leur avoir imprimé une rotation relative mesurée par l'angle  $\tau_2$ . Pour construire la surface d'univers, nous avons donc besoin d'un patron de tore avec une structure complexe donnée par  $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ .

Calculant la fonction de partition comme dans un gaz de Bose pour les hamiltoniens des secteurs droit et gauche, affectés des constantes d'ordre normal donnés par des valeurs de la fonction zêta

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \left( \frac{m}{R} - wR \right)^2 + \sum_{n \geq 1} \alpha_{-n} \alpha_n - \frac{1}{24}, \\
\tilde{H} &= \frac{1}{2} \left( \frac{m}{R} + wR \right)^2 + \sum_{n \geq 1} \tilde{\alpha}_{-n} \tilde{\alpha}_n - \frac{1}{24},
\end{aligned}$$

nous obtenons un produit de fonctions modulaires<sup>2</sup>, multiplié par une double somme sur les deux entiers  $m$  et  $w$  :

$$\begin{aligned}
Z(\tau, \bar{\tau}) &= (q\bar{q})^{-1/24} \frac{1}{\sqrt{\tau_2}} \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - q^n} \frac{1}{1 - \bar{q}^n} \sum_{m, w \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{4} \left( \frac{m}{R} - wR \right)^2} \bar{q}^{\frac{1}{4} \left( \frac{m}{R} + wR \right)^2}, \\
q &:= e^{2i\pi\tau}.
\end{aligned}$$

Nous lisons sur cette expression la symétrie de T-dualité, qui échange le rayon et son inverse, ainsi que les nombres d'impulsion et d'enroulement :

$$R \longleftrightarrow 1/R, \quad m \longleftrightarrow w.$$

---

<sup>2</sup>La fonction zêta de Dedekind apparaît, et ses transformations modulaires

$$\eta(\tau + 1) = e^{i\pi/12} \eta(\tau), \quad \eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \eta(\tau),$$

permettent de conclure à l'invariance modulaire de la fonction de partition :

$$\begin{aligned}
Z(\tau, \bar{\tau}) &= \frac{1}{\sqrt{3\tau}} \frac{1}{|\eta(\tau)|^2}, \\
\eta(\tau) &= q^{1/24} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n).
\end{aligned}$$



Revenons aux expressions des secteurs droit et gauche des coordonnées, et donnons une interprétation de la T-dualité valable pour les cordes ouvertes. Ces dernières ne donnent pas lieu à un nombre d'enroulement, ce qui nous prive à première vue de l'un des effets topologiques. Nous voyons que la T-dualité agit comme une parité asymétrique :

$$\begin{aligned}(p_0, \tilde{p}_0) &\longleftrightarrow (-p_0, \tilde{p}_0) \\ (\alpha_n, \tilde{\alpha}_n) &\longleftrightarrow (-\alpha_n, \tilde{\alpha}_n).\end{aligned}$$

Quant aux dérivées, elles s'échangent suivant la loi

$$\partial + \bar{\partial} \longleftrightarrow \partial - \bar{\partial},$$

ce qui modifie la matrice de réflexion, et fournit l'interprétation de la T-dualité pour les sous-variétés supportant les D-branes : une opération de T-dualité dans une direction transverse (resp. longitudinale) la transforme en direction longitudinale (resp. transverse).

## Échange entre structure complexe et structure de Kähler sur le tore

Prenons maintenant pour espace-cible le produit de deux cercles de rayons  $R_1$  et  $R_2$  :

$$X : \Sigma \rightarrow S_{R_1}^1 \times S_{R_2}^1.$$

. Génériquement, c'est-à-dire pour deux rayons différents, la symétrie du problème est héritée de la symétrie par T-dualité que présente chacun des deux cercles.

Nous avons cependant un peu plus de structure à notre disposition 0 : la forme du patron du tore rectangulaire équivalente à la donnée du rapport  $R_1/R_2$ , correspond à la donnée d'une structure complexe sur le tore. Quant à la taille du tore  $R_1 R_2$ , elle correspond à la donnée d'une forme de Kähler, puisqu'une telle forme en dimension deux n'est autre qu'une forme volume.

Or la T-dualité le long de l'un des cercles agit en permutant le quotient et le produit des deux rayons :

$$R_1 R_2 \longleftrightarrow \frac{R_1}{R_2}.$$

Il s'agit de la première apparition d'une telle permutation entre géométrie complexe et géométrie de Kähler. Elle est cependant imparfaite, puisque nous n'avons considéré que des patrons de tore rectangulaires, au lieu des formes de parallélogramme générique que donne une structure complexe générique. L'espace des structures complexes doit en effet être décrit par une affixe complexe, comme nous venons de le voir lors du calcul de la fonction de partition sur le cercle ; l'échange avec la forme de Kähler a lieu lorsque celle-ci est complexifiée par un champ antisymétrique (dont la donnée nécessite exactement un nombre réel dans le cas présent bidimensionnel).

## 2.2 Cordes ouvertes dans un champ électromagnétique

Ajoutons un champ de fond antisymétrique constant, conformément à l'opération à laquelle nous avons fait allusion pour réaliser l'échange des géométries complexe et kählérienne.

Avant d'interpréter cet échange comme la symétrie miroir, ce que nous ferons dans le contexte des cordes topologiques, nous allons inclure le champ de fond antisymétrique dans les conditions de bord, ce qui mélange les conditions de Neumann et de Dirichlet. Considérons une corde ouverte, se propageant sur fond de champ magnétique constant  $B_{\mu\nu}$  dans un espace-temps plat. Elle engendre une surface d'univers  $\Sigma$ , avec un bord. L'action contient un terme couplant le champ magnétique à la surface d'univers :

$$S = \int_{\Sigma} dX^{\mu} \wedge *dX_{\nu} + \int_{\partial\Sigma} \frac{1}{2} B_{\mu\nu} X^{\mu} \frac{dX^{\nu}}{dt}.$$

Les champs de fond représentent un certain état cohérent de cordes fermées, auquel se couple la surface d'univers  $\Sigma$  des cordes ouvertes. Le tenseur antisymétrique est lié au spectre des cordes ouvertes par une symétrie de jauge : en présence d'une D-brane, un champ de fond antisymétrique constant  $B_{\mu\nu}$  (qui est une deux-forme exacte) est équivalent à un champ magnétique :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} B &= \int_{\partial\Sigma} \frac{1}{2} B_{\mu\nu} X^{\mu} \frac{dX^{\nu}}{dt}, \\ \int_{\Sigma} B + \int_{\partial\Sigma} A &= \int_{\Sigma} (B - d\Lambda) + \int_{\partial\Sigma} (A + \Lambda). \end{aligned}$$

Autrement dit, on ne peut se débarrasser de l'influence du champ  $B$  sans hériter d'un photon sur la D-brane. Il sera souvent instructif d'adopter successivement le point de vue des cordes ouvertes et des cordes fermées pour l'interprétation des résultats concernant le champ magnétique de fond. Au cours des calculs, la combinaison invariante  $B + F$  sera souvent considérée comme l'expression de fluctuations des champs de jauge autour de la valeur moyenne  $B$ . Cette démarche est à la base de la résolution des équations de Seiberg–Witten de la théorie de jauge non-commutative par utilisation du lemme de Darboux [Cor00b, Liu01], que nous évoquerons au prochain chapitre.

Nous étudierons d'abord dans ce mémoire un fond de métrique plate et de deux-forme à coefficients constants  $B_{\mu\nu}$ , puis les cordes sur un espace compactifié sur une variété de Calabi–Yau de dimension complexe trois, ce qui induira, par l'indépendance de la physique quadridimensionnelle vis-à-vis des dimensions supplémentaires, des symétries  $O(6,6)$  qui motiveront le recours à la géométrie complexe généralisée.

Puisque la surface d'univers possède un bord, les équations du mouvement doivent à nouveau être assorties de conditions de bord, correspondant à l'annulation des termes de bord qui apparaissent lors de la variation infinitésimale des coordonnées :

$$\begin{aligned} S &= \int_{\Sigma} g_{\mu\nu} dX^{\mu} \wedge *dX_{\nu} + \int_{\Sigma} B, \\ \delta S &= \int_{\Sigma} d\sigma d\tau (\delta X^{\mu}) (\partial_{\sigma}^2 + \partial_{\tau}^2) X_{\mu} + \int_{\partial\Sigma} g_{\mu\nu} (\delta X^{\mu}) (\partial + \bar{\partial}) X^{\nu}. \end{aligned}$$

Ainsi les conditions de bord se lisent comme une compensation entre la force élastique entre les deux extrémités de la corde et les forces électromagnétiques :

$$(g_{\mu\nu} - B_{\mu\nu}) \partial X^{\nu} = -(g_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}) \bar{\partial} X^{\nu}.$$

Au cours de ce mémoire, nous allons faire deux usages principaux de cette équation.

1. *Usage comme moyen de calcul : cette équation autorise à calculer le propagateur des champs scalaires  $X^\mu$  et à calculer des intégrales de chemin en utilisant le formalisme des états de bord. Ce genre de calcul confirme et précise les prédictions de la théorie des champs non-commutatifs, que nous exposerons au chapitre 3.*
2. *Usage comme moyen de description géométrique des D-branes dans les théories des cordes topologiques (le lien entre ces théories topologiques et les états de bord est apparu dans l'article [OOY96] par Ooguri, Oz et Yin).*

Il sera utile, lors de la discussion des D-branes topologiques, d'adopter des coordonnées complexes  $z = \sigma + i\tau$ ,  $\bar{z} = \sigma - i\tau$  sur la surface d'univers. Nous avons montré que les conditions de bord pour les coordonnées du plongement s'écrivent

$$\partial_z \phi^\mu - R^\mu_\nu \partial_{\bar{z}} \phi^\nu = 0,$$

avec la matrice de réflexion  $R$  donnée pour des coordonnées longitudinales (ou dans le cas d'une D-brane remplissant tout l'espace), par l'expression :

$$R^\mu_\nu = \left( \frac{1}{g - B} \right)^{\mu\rho} (g + B)_{\rho\nu}.$$

En incluant les directions transverses, ou en étudiant une D-brane de dimension éventuellement plus petite, supportée par une sous-variété  $Y$  de l'espace-cible, nous trouvons la décomposition suivante adaptée au fibré normal  $NY$  et au fibré tangent  $TY$ , suivant la formule plus intrinsèque :

$$R = (-\text{Id})_{NY} \oplus \left( \frac{1}{g - B} (g + B) \right)_{TY},$$

où la restriction au fibré tangent est automatique si l'on considère  $B$  comme un champ magnétique à valeur de distribution. En l'absence de ce champ, les directions normales à la D-brane sont des vecteurs propres associés à la valeur propre  $-1$ , et les directions tangentes des vecteurs propres associés à la valeur propre  $+1$ .

## 2.3 Propagateurs et mélanges Neumann–Dirichlet

Les conditions aux limites écrites plus haut se prêtent à des calculs d'action effective pour les D-branes considérées comme des états étendus (*états de bord* notés  $|B\rangle$ ), définis par l'action algébrique des opérateurs contenus dans les conditions aux limites :

$$(\partial \phi^\mu - R^\mu_\nu \bar{\partial} \phi^\nu) |B\rangle = 0.$$

C'est le formalisme utilisé dans les travaux exposés dans le chapitre 4, qui concerne les corrections dérivatives. Une introduction efficace est donnée dans les notes de Di Vecchia et Liccardo [DVL00]. Ce type de calcul ne fait pas usage de la notion de théorie de jauge non-commutative. Il nous donnera un moyen de valider (et de compléter) dans le langage ordinaire les méthodes issues de la théorie de jauge non-commutative.

En présence d'un champ magnétique, les conditions de bord définissant la position des D-branes, qui sont les premières équations imposées à ces objets, mélangent les conditions

de Dirichlet et de Neumann, ce qui ouvre des perspectives naturelles de recherche, en relation avec la T-dualité qui dicte l'incorporation des D-branes en théorie des cordes. En effet, la T-dualité n'est autre qu'une parité n'agissant que sur le secteur droit des coordonnées. Les D-branes plongées dans un champ magnétique, avec leur mélange de conditions de bord, doivent pouvoir être décrites à partir d'une rotation effectuée sur les conditions de bord. C'est en tout cas une façon de calculer le propagateur des champs scalaires [BGKL00], dont il est fait grand usage dans la suite de ce mémoire.

Pour simplifier les notations, nous nous plaçons sur un tore  $T^2$ , ce qui revient à diagonaliser par blocs le champ de fond  $B$ . La notation  $B$  désignera donc provisoirement dans les calculs la valeur propre antisymétrique correspondant à un bloc

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous partons d'une D0-brane et nous allons reconnaître le résultat d'une action asymétrique du groupe des rotations  $SO(2)$  sur cette D0-brane dans la séquence suivante de trois opérations élémentaires : T-dualité dans la direction 1, rotation de la D1-brane résultante, T-dualité dans la direction 2. En d'autres termes, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} IIA & \xrightarrow{\text{T-dualité}} & IIB \\ \downarrow \text{rotation} & & \downarrow \text{rotation asymétrique} \\ V_1 & \xrightarrow{\text{T-dualité}} & V_2 \end{array}$$

De plus, l'action asymétrique donne précisément les conditions mixtes de Dirichlet et Neumann, moyennant une identification de  $B$  à une certaine fonction trigonométrique de l'angle de rotation.

Les parties holomorphe et anti-holomorphe du champ de coordonnées bosoniques dans l'espace-cible

$$Z_L := X^1(z) + iX^2(z), \quad Z_R := X^1(\bar{z}) + iX^2(\bar{z}),$$

se transforment par action d'un sous-groupe. La prise en compte d'un sous-groupe discret de  $U(1)$  (via une phase rationnelle  $\varphi$ , ce qui autorise la discussion de l'équivalence de Morita [AGB02]), disons  $\mathbf{Z}_N$ , induit la loi

$$[Z_L, Z_R] \mapsto [e^{i\varphi} Z_L, e^{i\varphi} Z_R],$$

alors que la T-dualité dans la direction 1 agit comme une parité asymétrique. Ceci implique que la séquence des trois opérations décrites plus haut agit de façon asymétrique sur les secteurs droit et gauche :

$$[Z(z), Z(\bar{z})] \mapsto [e^{-i\varphi} Z(z), e^{i\varphi} Z(\bar{z})].$$

Effectuons ces trois transformations sur les conditions de bord. Nous partons d'une D0-brane :

$$\begin{cases} \partial_\tau X^1 = 0 \\ \partial_\tau X^2 = 0, \end{cases}$$

qui se transforme par T-dualité en une D1-brane dans la direction 1 :

$$\begin{cases} \partial_\sigma X^1 = 0 \\ \partial_\tau X^2 = 0, \end{cases}$$

qui subit une rotation de manière géométrique,

$$\begin{cases} \cos \varphi \partial_\sigma X^1 - \sin \varphi \partial_\sigma X^2 = 0 \\ \sin \varphi \partial_\tau X^1 + \cos \varphi \partial_\tau X^2 = 0. \end{cases}$$

La T-dualité suivant la direction 1 donne précisément les conditions mixtes induites par le tenseur antisymétrique, moyennant l'identification

$$B := \cot \varphi,$$

$$\begin{cases} \partial_\sigma X^1 - B \partial_\tau X^2 = 0 \\ \partial_\sigma X^2 + B \partial_\tau X^1 = 0. \end{cases}$$

Nous avons donc parcouru trois côtés du diagramme commutatif.

En appliquant des rotations d'angles opposés  $\varphi$  et  $-\varphi$  aux secteurs droit et gauche d'une fonction harmonique du demi-plan complexe supérieur, nous déduisons le propagateur des coordonnées dans le champ de fond antisymétrique  $B$ , avec deux nouveaux termes, l'un fonction paire de  $\varphi$ , et l'autre fonction impaire :

$$\begin{aligned} \langle X^\mu(z) X^\nu(z') \rangle &= -\alpha' \delta^{\mu\nu} \ln |z - z'| \\ &\quad - \alpha' \epsilon^{\mu\nu} \sin \varphi \cos \varphi \ln \left( \frac{z - \bar{z}'}{\bar{z} - z'} \right) - \alpha' \delta^{\mu\nu} (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \ln |z - \bar{z}'|. \end{aligned}$$

En prenant en compte toutes les directions en dimension plus grande, nous retrouvons le propagateur de [CLNY87] en fonction des champs de fond. Au chapitre suivant nous l'utiliserons pour le calcul du développement en produits d'opérateurs de deux ondes planes, ce qui motivera l'introduction de la limite de Seiberg–Witten et de la non-commutativité. Le propagateur complet sera utilisé dans le chapitre 4, concernant les corrections dérivatives au-delà de la limite de Seiberg–Witten.

## 2.4 Cordes topologiques

### La R-symétrie et les twists topologiques

Introduisons les cordes topologiques, obtenues en faisant jouer à une symétrie interne de la supersymétrie  $\mathcal{N} = 2$  le rôle d'une symétrie d'espace-temps. Nous allons voir qu'il existe deux façons distinctes d'effectuer cette modification, et que l'une et l'autre conduisent à de remarquables propriétés de localisation, donnant aux D-branes topologiques une riche structure géométrique. Le point de départ est la supersymétrie  $\mathcal{N} = 2$ , ce qui suppose quatre courants conservés : le tenseur énergie-impulsion  $T$ , le R-courant  $J$  correspondant à la R-symétrie entre les deux générateurs de supersymétrie, et les deux super-courants  $G^+$  et

$G^-$ , dans lesquels le signe désigne la R-charge. Ces courants étant définis sur la surface d'univers, l'algèbre de supersymétrie existe naturellement sous la forme de deux copies, droite et gauche :

$$(T_L, J_L, G_L^+, G_L^-),$$

$$(T_R, J_R, G_R^+, G_R^-).$$

Le courant  $J$  peut être incorporé dans les symétries d'espace-temps par modification du tenseur énergie-impulsion, ce qui altère les spins de tous les champs chargés sous la R-symétrie. En particulier, un nouvel opérateur de spin 1 est produit à partir de l'une des super-charges si la modification du tenseur énergie-impulsion est affectée d'un facteur  $1/2$  :

$$T \mapsto T \pm \frac{1}{2} \partial J.$$

L'indétermination dans le signe conditionne le nouveau courant de spin 1, et le complexe BRST associé (la charge conservée donnée par l'intégrale du courant de spin 1 possède un spin 0, c'est donc un scalaire, qui peut vivre sans donnée supplémentaire sur une géométrie courbe). C'est à ce choix de signe, bénin semble-t-il, que nous devons les deux modèles de cordes topologiques. Ceux-ci seront reliés, avec des géométries d'espace-cible très différentes, par la symétrie miroir. Witten a donné dans [Wit91] une description des liens entre la symétrie miroir et les théories topologiques.

La liste des courants conservés doit être complétée par l'opérateur de flot spectral  $e^{i\varphi}$ , responsable de la supersymétrie d'espace-temps, et lié à la bosonisation des R-courants et à la forme holomorphe, dans une variété de Calabi-Yau de dimension complexe  $d$ , par les relations

$$e^{i\phi} = \Omega_{i_1 \dots i_d} \psi^{i_1} \dots \psi^{i_d},$$

$$J = i\partial\phi,$$

La condition de recollement entre les deux tenseurs énergie-impulsion modifiés possibles définit les conditions de bord<sup>3</sup> des D-branes des modèles A :

$$\begin{cases} J_L = -J_R, \\ e^{i\phi_L} = e^{i\alpha} e^{-i\phi_R}, \\ G_L^+ = \pm G_R^-, \end{cases}$$

et B :

$$\begin{cases} J_L = J_R, \\ e^{i\phi_L} = (\pm 1)^d e^{i\alpha} e^{i\phi_R}, \\ G_L^+ = \pm G_R^+, \end{cases}$$

Ces conditions sont vérifiées moyennant l'existence d'une matrice de réflexion orthogonale, notée  $R$ .

---

<sup>3</sup>Les conditions sur les flots spectraux sont écrites à une phase près ; la phase du modèle A peut être cachée dans une redéfinition de la 3-forme holomorphe, mais elle a d'autre part été identifiée comme l'image par symétrie miroir de la phase du modèle B. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 7.

## D-branes topologiques

Les conditions de bord correspondent à l'envoi par une application  $\Phi$  des bords de la surface d'univers  $\Sigma$  sur une sous-variété  $Y$  de l'espace-cible  $X$  :

$$\Phi(\partial\Sigma) \subset Y.$$

La contribution des champs de jauge viendra progressivement corriger cette image strictement géométrique. Cette contribution est contenue dans la matrice  $R$ , orthogonale par rapport à la métrique de l'espace-temps :

$$\partial_z \phi^\mu = R^\mu_\nu(\phi, g, F) \partial_z \phi^\nu.$$

Cette matrice de réflexion contient toujours *a priori* la contribution des champs de jauge, ce qui peut corriger, en les rendant moins symétriques, certaines conclusions de géométrie différentielle<sup>4</sup>.

Un vecteur propre  $v$  de la matrice  $R$  associé à la valeur propre (-1) correspond à une condition de Dirichlet

$$v_\mu \partial_\tau X^\mu|_{\partial\Sigma} = 0;$$

il est donc normal à la D-brane. Lorsque le tenseur du champ de jauge  $F$  est nul, la matrice  $R$  est symétrique et les vecteurs propres de  $R$  associés à la valeur propre (+1) correspondent à une condition de Neumann et engendrent en tout point l'espace tangent à la D-brane. Les fermions font également l'objet de conditions de bord,

$$\psi^\mu_+ = R^\mu_\nu \psi^\nu_-.$$

Ces conditions ne préservent pas l'entier de la symétrie superconforme  $\mathcal{N} = (2,2)$ , et restreignent la géométrie des D-branes de différentes façons selon le twist topologique. Nous allons écrire des conditions de bord (définissant des D-branes dans l'approche de surface d'univers) pour des théories superconformes  $\mathcal{N} = 2$  qui préservent la supersymétrie de la surface d'univers, et la moitié de la supersymétrie  $\mathcal{N} = 2$  d'espace-temps.

Considérons pour commencer le modèle A. En utilisant des coordonnées holomorphes associées à une structure complexe  $J$  sur l'espace-cible, le twist topologique implique que les coefficients de la matrice  $R$  des conditions de bord ne relient les directions holomorphes qu'aux directions anti-holomorphes :

$$R^\mu_\nu = R^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}} = 0.$$

Autrement dit, nous avons dans le modèle A la relation

$$R^t J R = -J.$$

De plus, faisons l'hypothèse que le tenseur du champ de jauge  $F$  est nul<sup>5</sup>. La matrice  $R$  est alors symétrique. Soit un vecteur  $v$  tangent à la D-brane. C'est un vecteur propre de  $R$  associé à la valeur propre +1. La relation précédente implique que le vecteur  $Jv$  est un vecteur

<sup>4</sup>par exemple en permettant des A-branes non-lagrangiennes

<sup>5</sup>Une décomposition par blocs de la matrice de réflexion a conduit Kapustin et Orlov à mettre en évidence la possibilité de A-branes non-lagrangiennes, coisotropes, portant une courbure de jauge non nulle. Nous donnerons un exemple sur le tore au dernier chapitre. Nous nous servons des symétries de cette situation non-lagrangiennes pour déduire une relation de T-dualité en théorie des cordes ouvertes entre deux spineurs purs

propre associé à la valeur propre  $-1$ . Il est donc orthogonal à la D-brane. Comme la structure complexe  $J$  est inversible, la dimension de la D-brane est égale à la moitié de la dimension de l'espace-cible. De plus, l'orthogonalité entre les vecteurs  $v$  et  $Jv$  s'écrit en utilisant la forme de Kähler  $\omega$  :

$$\omega = g_{\mu\rho} J^\rho_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

$$\omega(u, Jv) = 0.$$

En libérant les vecteurs tangents  $u$  et  $v$ , nous obtenons le fait suivant : *les D-branes du modèle A, lorsqu'elles supportent un fibré à courbure nulle, sont des sous-variétés lagrangiennes de l'espace-cible.*

L'étude des cas de courbure non nulle par des méthodes symplectiques, sous l'hypothèse d'une fibration en tores  $T^3$ , sera l'objet du chapitre 7, mais nous allons exposer ici les arguments de théorie supersymétrique  $\mathcal{N} = 2$  qui conduisent aux conditions définissant les D-branes topologiques dans les deux modèles (on parlera de A-branes et de B-branes pour désigner les D-branes des modèles topologiques A et B).

Dans le modèle B, la décomposition de l'espace tangent en somme directe du fibré tangent et du fibré normal au cycle supportant la D-brane, permet de définir une structure complexe sur ce cycle. En présence d'un champ de jauge, le fibré associé est holomorphe. Quant à la condition de stabilité, elle exprime la phase  $e^{i\alpha}$  en fonction de la forme de Kähler et du champ de jauge [KL03], exprimant la non-dégénérescence d'une certaine forme différentielle :

$$e^{i\alpha} = \frac{(\omega + F)^p}{\text{vol}|_Y}.$$

Passons en revue la déduction de ce résultat à partir du twist du modèle B. Les conditions sur les courants conservés sont

$$Q^\pm = \bar{Q}^\pm, \quad J = \bar{J}.$$

Grâce à l'orthogonalité de la matrice de réflexion  $R$ , il suffit pour vérifier cette équation d'avoir la relation supplémentaire

$$R^t \omega R = \omega.$$

Avec la structure presque complexe

$$J := G^{-1} \omega,$$

la condition d'orthogonalité et la condition liant  $R$  à  $\omega$  donnent lieu à une relation de commutation :

$$R^{-1} J R = J.$$

Cette relation implique que les sous-espaces propres de  $R$  associés aux valeurs propres  $-1$  et  $+1$  sont stables par action de  $J$ . Le fibré normal est donc stable par  $J$ . Sur le fibré tangent, cette stabilité induit une structure complexe, et un fibré holomorphe. C'est la localisation sur la géométrie complexe dans le modèle B.

Nous énonçons donc le résultat-slogan de cette section :

*les A-branes sont définies par des conditions de géométrie symplectique induites par la forme de Kähler, et les B-branes sont définies par des conditions de géométrie complexes : elles portent des fibrés*



*holomorphes.*

Le problème de la complexification de la forme de Kähler par le champ antisymétrique  $B$  discuté brièvement dans l'exemple du tore, ainsi que les rapports étroits entre ce champ et le tenseur du champ de jauge, motivent l'étude de la symétrie miroir en présence de D-branes, qui sera abordée au chapitre 7, et mettra en évidence une intervention du champ de jauge qui ne pouvait être prévue, pour des raisons dimensionnelles, dans l'exemple simple du tore  $T^2$ .

## Chapitre 3

# Théories de jauge non-commutatives sur les D-branes

*Dans ce chapitre, je présente la notion de théorie de jauge non-commutative qui émerge dans une limite d'échelle de la théorie des cordes, lorsqu'une D-brane est suspendue dans un fond de cordes fermées avec une métrique plate et un champ antisymétrique  $B_{\mu\nu}$ . Les actions effectives gouvernant la dynamique des D-branes, actions dites de Born–Infeld et de Wess–Zumino (ou de Chern–Simons) peuvent être écrites de différentes façons, dont l'une utilise une théorie de jauge non-commutative. Ces actions offrent en outre une voie physique vers la solution des problèmes de cohérence interne (invariance de jauge et non-localité) de la théorie de jauge non-commutative.*

### 3.1 Théorie de jauge non-commutative et symétrie de dualité

#### Argument heuristique : champ magnétique et échelle de non-commutativité

Reprenons la situation introduite au début du chapitre précédent : une D-brane est présente dans l'espace plat, ainsi qu'un champ  $B_{\mu\nu}$  constant, équivalent à un champ magnétique le long de la D-brane. L'action est la somme de deux termes, l'un provenant de l'action de Polyakov de la surface d'univers  $\Sigma$ , et l'autre de l'intégrale de  $B$ . Dans la limite où les cordes sont très tendues, moyennant une limite d'échelle, on peut imaginer que ce dernier terme gouverne à lui seul la dynamique de la corde :

$$S_{\Sigma} \sim \int_{\partial\Sigma} d\tau B_{\mu\nu} X^{\mu} \partial_{\tau} X^{\nu}.$$

Ainsi les équations du mouvement deviennent des relations de commutation sur l'algèbre des coordonnées le long du volume d'univers de la D-brane :

$$[X^{\mu}, X^{\nu}] = i\theta^{\mu\nu},$$

avec la définition, qui suppose que le tenseur  $B_{\mu\nu}$  est inversible, autrement dit qu'il induit une forme symplectique sur le volume d'univers de la D-brane :

$$\theta^{\mu\nu} := (B^{-1})^{\mu\nu}.$$

Dans leur article de 1999 sur la géométrie non-commutative en théorie des cordes [SW99], Seiberg et Witten ont argumenté en faveur de ces relations de commutation entre les coordonnées, et identifié une limite de théorie non-commutative des champs le long des D-branes.

## Limite de Seiberg–Witten et non-commutativité

Le propagateur des champs scalaires en théorie des supercordes peut être évalué en présence d’une D-brane. Afin de simplifier les notations, nous considérerons une D-brane remplissant tout l’espace. Le calcul se généralise immédiatement aux dimensions plus faibles par restriction aux directions longitudinales. Nous avons donc une D9-brane, ou des conditions de Neumann dans toutes les directions. Le propagateur des champs scalaires est un tenseur à deux indices

$$\langle X^\mu(\sigma_1) X^\nu(\sigma_2) \rangle = \alpha' G^{\mu\nu} \ln |\sigma_1 - \sigma_2|^2 + \frac{i}{2\pi} \Theta^{\mu\nu} \epsilon(\sigma_1 - \sigma_2),$$

$$G^{\mu\nu} := \left( \frac{1}{g + 2\pi\alpha' B} \right) \Big|_{\text{sym}},$$

$$\Theta^{\mu\nu} := \left( \frac{1}{g + 2\pi\alpha' B} \right) \Big|_{\text{antisym}},$$

dont la partie symétrique est liée à des dimensions anormales dans les développements en produits d’opérateurs. Cette partie symétrique a le même rôle que la métrique dans le produit d’opérateurs, ce qui doit être traduit dans un langage adapté à notre secteur de cordes ouvertes sur fond de champ électromagnétique couplé à la ligne des extrémités des cordes. Le tenseur symétrique en question mérite donc le nom de métrique de cordes ouvertes. On le note  $G$ , alors que son partenaire antisymétrique se note  $\Theta$ , et ceci en général, avant de prendre une quelconque limite. Écrivons la modification du développement en produit d’opérateurs de deux ondes planes, induite par le champ antisymétrique. Il s’agit d’une simple phase, qui sera la signature des théories non-commutatives, comme facteur de vertex dans les règles de Feynman

$$e^{ik_1 X(\sigma_1)} e^{ik_2 X(\sigma_2)} \sim |\sigma_1 - \sigma_2|^{\alpha' k_{1,\mu} G^{\mu\nu} k_{2,\nu}} e^{\frac{i}{2} k_{1,\mu} \Theta^{\mu\nu} k_{2,\nu}} e^{i(k_1 + k_2) X(\sigma_1)}.$$

Il est possible d’identifier une limite de théorie des champs non-commutative telle que le raisonnement heuristique du début (consistant à négliger le terme de tension superficielle dans l’action de la surface d’univers pour ne retenir que le couplage de bord), donne effectivement le bon résultat. Ce que nous demandons à cette limite tient à la régularité à courte distance des développements en produit d’opérateurs : pour retrouver les relations algébriques entre les coordonnées évoquées plus haut, nous sommes contraints d’écrire une limite d’échelle, dans laquelle la métrique de cordes fermées  $g$  tend vers 0 plus vite que l’inverse de la tension de corde :

$$g \sim \epsilon,$$

$$\alpha' \sim \epsilon^2.$$

Nous avons donc affaire à des cordes très tendues, mais dont la structure confère à la théorie des champs une structure non-commutative. Le tenseur antisymétrique  $\Theta$  se réduit bien à l’inverse du champ magnétique dans cette limite,

$$\Theta \mapsto \theta := B^{-1},$$

et le propagateur ne comporte plus qu’un terme, ce qui rendra plus simple le calcul des intégrales de chemin par contraction de Wick dans cette limite d’échelle, dite de Seiberg et Witten [SW99] :

$$\langle X^\mu(\sigma_1) X^\nu(\sigma_2) \rangle = \theta^{\mu\nu} \epsilon(\sigma_1 - \sigma_2).$$

Il est à noter que cette notion de non-commutativité, invariante par translation, a motivé l'introduction de la limite d'échelle. Ce point de vue géométrique sur l'existence d'une formulation non-commutative de la théorie des champs est massivement utilisé dans [SW99], et le problème de la transformation des champs de jauge est posé par la cohérence interne avec ce point de vue géométrique. Cet usage n'est cependant pas obligatoire : une fois la limite d'échelle identifiée, rien n'interdit (et ce sera le propos du prochain chapitre) de garder un point de vue ordinaire (au sens de commutatif<sup>1</sup>), et d'évaluer des actions effectives à l'ordre du disque

$$Z[A] = \int DX e^{-S[X,A]},$$

par contractions de Wick à l'aide du propagateur antisymétrique, sans référence à l'interprétation géométrique des opérateurs non-locaux qui ne manqueront pas d'émerger.

Faisant l'économie des considérations géométriques préalables, nous n'aurons pas l'usage des symétries de dualités, ce que nous paierons par une combinatoire plus lourde au cours des calculs. Néanmoins, les résultats, pour autant qu'ils puissent se comparer à des prévisions pour les actions effectives issues du point de vue non-commutatif, auront valeur de test en théorie des cordes pour un argument de symétrie émis au niveau de la théorie non-commutative des champs.

Afin d'apprécier cet argument, présentons les conséquences les plus générales de la non-commutativité sur les actions effectives et sur la description des champs de jauge.

## Non-commutativité, non-localité et actions effectives

### Les produits

Les coordonnées du volume d'univers de la D-brane étant assujetties aux relations de commutation

$$[X^\mu, X^\nu] = i\theta^{\mu\nu},$$

c'est toute l'algèbre des fonctions de ces coordonnées qui doit être modifiée. En particulier, pour des champs scalaires, la loi de multiplication ordinaire est remplacée par le produit dit de Moyal, ou star-produit,

$$f * g(x) := f(x) \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial'_\nu\right) g(x')\Big|_{x'=x},$$

ce dont on peut se convaincre en séparant les modes de Fourier les uns des autres. Nous reviendrons sur la question de la non-localité induite par le nombre infini de dérivées dans ce produit, car il sera difficile d'écrire des couplages invariants de jauge en remplaçant tous les produits ordinaires par cet opérateur. Néanmoins nous pouvons faire quelques observations concernant les théories des champs scalaires. L'action s'obtient à partir de celle de la théorie

---

<sup>1</sup>Les termes *ordinaire* ou *commutatif* sont employés dans ce contexte pour qualifier les lois de multiplication des champs, par opposition au terme *non-commutatif* ; pour parler de la structure du groupe de jauge, on utilisera les termes *abélien* et *non-abélien*.

ordinaire [Har01] en remplaçant la multiplication ordinaire par un produit de Moyal<sup>2</sup>, si bien que nous avons à notre disposition une théorie non-commutative avec ses règles de Feynman induites par la simple correspondance :

$$S = \int dx(\cdots + \phi \times \cdots \times \phi + \cdots) \rightarrow \hat{S} = \int dx(\cdots + \phi * \cdots * \phi + \cdots).$$

À propos des règles de Feynman, d'intéressantes observations ont été faites par Minwalla, Van Raamsdonk et Seiberg [MVR00]. La modification de la théorie par déformation du produit induit une modification des règles de Feynman par une simple inclusion de facteurs de phase gaussiens aux vertex, ce qui est manifeste via l'écriture du produit de Moyal dans l'espace de Fourier :

$$\widetilde{f * g}(k) = \delta(k - k_1 - k_2) f(k_1) \exp\left(\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_{1,\mu} k_{2,\nu}\right) g(k_2).$$

Tout se passe comme si le nouveau paramètre dimensionné  $\theta$  régularisait la théorie, rendant possible l'intégration sur l'espace des impulsions. Le problème de l'ordre des limites engendre celui du mélange entre les régions infra-rouge et ultra-violette, vestige de l'origine de la non-commutativité en théorie des cordes, qui pose la question du potentiel phénoménologique des théories non-commutatives [AGVM03], à commencer par l'électrodynamique réécrite avec des produits de Moyal. Pour poursuivre l'étude des D-branes, nous avons besoin de champs de jauge, c'est-à-dire d'une structure fibrée qui doit réagir au nouveau caractère non-commutatif de l'espace qui lui sert de base.

## Les champs de jauge

Seiberg et Witten ont donné dans [SW99] un argument général de théorie quantique des champs, qui dédramatise l'introduction de la non-commutativité. Celle-ci apparaît en effet naturellement via les commutateurs associés à une régularisation par séparation ponctuelle des opérateurs. Une théorie commutative est en revanche adaptée à une régularisation à la Pauli-Villars.

Puisque la géométrie du volume d'univers de la D-brane peut être commutative ou non-commutative selon la régularisation adoptée, cette géométrie, au moins pour des valeurs suffisamment génériques des champs de fond, n'est rien d'autre qu'un mode de description relevant de notre choix. Le choix de la description non-commutative peut être motivé, dans des cas que nous exposerons en détail, par la richesse de la structure géométrique associée, qui fournit à bon marché des résultats jusqu'alors inaccessibles aux calculs effectués dans le cadre commutatif. Dans une situation invariante de jauge, la description non-commutative a un effet inattendu : même dans le cas abélien, des commutateurs de champs de jauge apparaissent, qui sont nuls dans la théorie ordinaire de groupe de jauge  $U(1)$ . On parle alors de théorie

---

<sup>2</sup>Quant à l'intégrale, il s'agit en fait d'une trace sur l'espace de Hilbert associé aux relations de commutation dans une interprétation à la Heisenberg, par la prescription dite de Weyl, qui associe un opérateur  $\hat{f}$  à chaque champ  $f$  de manière compatible avec le produit de Moyal :

$$\widehat{\hat{f} \hat{g}} = \widehat{f * g}.$$

Nous continuerons à écrire des intégrales par rapport à des coordonnées non-commutatives, mais elles sont à prendre en un sens formel.

de jauge non-commutative abélienne de Yang–Mills. Or la notion d’orbite de jauge est, elle, topologique et intrinsèque, indépendante de notre choix d’un mode de régularisation. Elle doit être présente dans l’une et l’autre des descriptions. Il doit donc exister un champ de jauge non-commutatif  $\hat{A}$ , défini de manière certainement non-linéaire à partir du champ de jauge ordinaire  $A$ , tel que les transformations de jauge, elles-mêmes redéfinies à l’aide d’un paramètre  $\hat{\lambda}$ , respectent les orbites de jauge :

$$\begin{aligned}\delta A_\mu &= \partial_\mu \lambda, \\ \delta_{\hat{\lambda}} \hat{A}_\mu &= \partial_\mu \hat{\lambda} + [\hat{\lambda}, \hat{A}_\mu]_*.\end{aligned}$$

Le tenseur de courbure du champ de jauge sera naturellement ordinaire et abélien ou non-commutatif et abélien de Yang–Mills :

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\ \hat{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu + [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_*.\end{aligned}$$

On appelle transformation de Seiberg–Witten l’application qui fait passer d’un champ de jauge commutatif à un champ de jauge non-commutatif en préservant les orbites de jauge. La condition de préservation des orbites de jauge se lit, en rendant explicite la dépendance du champ de jauge  $\hat{A}$  vis-à-vis du champ de jauge  $A$  :

$$\hat{A}(A) + \delta_{\hat{\lambda}} \hat{A}(A) = \hat{A}(A + \delta_\lambda A).$$

Cette condition induit un flot sur l’espace des échelles de non-commutativité :

$$\begin{aligned}\frac{\delta \hat{A}_\mu}{\delta \theta^{\rho\sigma}} &= -\frac{1}{4} (\hat{A}_\rho * (\partial_\sigma \hat{A}_\mu + \hat{F}_{\sigma\mu}) + (\partial_\sigma \hat{A}_\mu + \hat{F}_{\sigma\mu}) * \hat{A}_\mu), \\ \frac{\delta \hat{F}_{\mu\nu}}{\delta \theta^{\rho\sigma}} &= \frac{1}{4} (2\hat{F}_{\mu\rho} * \hat{F}_{\nu\sigma} + 2\hat{F}_{\nu\sigma} * \hat{F}_{\mu\rho} - \hat{A}_\rho * (D_\sigma \hat{F}_{\mu\nu} + \partial_\sigma \hat{F}_{\mu\nu}) - (D_\sigma \hat{F}_{\mu\nu} + \partial_\sigma \hat{F}_{\mu\nu}) * \hat{A}_\rho),\end{aligned}$$

avec la condition initiale en  $\theta = 0$  donnée par les quantités commutatives. On obtient l’équation pour  $\delta \hat{F} / \delta \theta$  en développant le commutateur dans la définition de  $\hat{F}$  au premier ordre en  $\theta$ . Il est instructif de résoudre ce problème pour un champ électromagnétique constant : dans ce cas, les termes qui font intervenir des dérivées de  $\hat{F}$ , ne contribuent pas :

$$\begin{aligned}\delta \hat{F} &= -\hat{F} \delta \theta \hat{F}, \\ \hat{F}_{\theta=0} &= F, \\ F &= \hat{F} \frac{1}{1 - \theta \hat{F}}.\end{aligned}$$

Cet argument d’invariance de jauge doit nous intriguer, puisque la structure même du produit de Moyal conspire contre l’invariance de jauge via sa non-localité. La relation

$$f(x) * e^{ikx} = e^{ikx} * f(x + \theta k)$$

implique en effet que les transformations de jauge affecteront les différents modes de Fourier d’un même champ de façon différente. Cet étalement des transformations de jauge sur le spectre de Fourier devra être compensé mode par mode afin d’obtenir des observables invariants de jauge. Le rôle des lignes de Wilson ouvertes dans le rétablissement de l’invariance de jauge dans les théories non-commutatives a été mis en évidence par Gross, Hashimoto et Itzhaki [GHI00], avant d’être exploité pour résoudre les équations de Seiberg–Witten.

## 3.2 L'action de Dirac–Born–Infeld comme action effective de la théorie des cordes

### Fonction de partition de la corde bosonique à l'ordre du disque

Suivant Fradkin et Tseytlin [FT85], calculons la fonction de partition de cordes bosoniques ouvertes couplées à un champ de jauge  $U(1)$  sur leur bord. Dans les calculs qui suivent,  $x$  désigne le mode constant de la coordonnée  $X$ , et  $\xi$  ses fluctuations. Afin d'intégrer séparément par rapport aux fluctuations des coordonnées en dimensions deux et le long du bord, nous introduisons une nouveau paramètre fonctionnel  $\eta$ , vivant sur le bord, ainsi qu'une contrainte liant les coordonnées à  $\eta$ . Le tenseur du champ de jauge  $F_{\mu\nu}$  est choisi constant, le couplage  $S_{\partial\Sigma}$  au bord ne contient donc pas de dérivées de  $F_{\mu\nu}$ .

$$\begin{aligned} Z &= \int d^{26}x \int D\xi \int D\eta e^{-S_{\Sigma}[\xi] - S_{\partial\Sigma}[A, \xi|_{\partial\Sigma}]} \delta(\xi|_{\partial\Sigma} - \eta), \\ S_{\Sigma}[\xi] &= T \int_{\Sigma} d^2z \partial\bar{\xi}^{\mu} \bar{\partial}\xi_{\mu}, \\ S_{\partial\Sigma}[A, \xi] &= \int_{\partial\Sigma} d\tau \dot{\xi}^{\mu} F_{\mu\nu} \xi^{\nu}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Représentons la contrainte à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange  $\nu$  (distribution à support sur le bord) et intégrons successivement par rapport à  $\xi$  et  $\nu$ . Le crochet est celui des distributions,  $\star$  désigne la convolution.

$$\begin{aligned} Z &= \int d^{26}x \int D\eta \int D\nu \int D\xi \exp \left\{ - \left\langle \xi, \frac{d^2}{d\tau^2} \xi \right\rangle - i \langle \nu, \xi \rangle - i \langle \eta, \nu \rangle - S_{\partial\Sigma}[\eta] \right\} \\ &= \int d^{26}x \int D\eta \int D\nu \exp \{ - \langle \nu, G \star \nu \rangle - i \langle \eta, \nu \rangle - S_{\partial\Sigma}[\eta] \} \\ &= \int d^{26}x \int D\eta \exp \{ - \langle \eta, G^{-1} \star \eta - S_{\partial\Sigma}[\eta] \rangle, \end{aligned} \tag{3.2}$$

où  $G$  désigne la fonction de Green de l'opérateur de d'Alembert. Diagonalisons le tenseur  $F$  par blocs et considérons le bloc  $(\eta^1, \eta^2)$ , dont la valeur propre antisymétrique associée est notée  $f$ . L'opérateur de d'Alembert étant diagonal, les termes associés dans l'intégrand s'écrivent

$$\eta^1 G^{-1} \eta^1 + \eta^2 G^{-1} \eta^2 + i f^2 \eta^1 \eta^2,$$

de sorte que l'intégrale fonctionnelle est gaussienne en  $\eta^2$ , ce qui permet d'effectuer l'intégrale par rapport à la moitié des composantes de  $\eta$ , en notant  $f_i$  les valeurs propres antisymétriques de  $F$ , pour  $i$  compris entre 1 et 13.

Normalisons par rapport à la configuration dans laquelle le champ électromagnétique est nul :

$$Z[F] = \int d^{26}x \int \prod_{j=1}^{13} D\eta_j \exp \left\{ - \left\langle \eta, \left( 1 - f^2 G \star \frac{d^2}{d\tau^2} G \right) \star \eta \right\rangle \right\}.$$

Or le support de la coordonnée  $\eta$  est concentré sur le bord. Donc c'est la restriction au bord de la fonction de Green  $G$  qui intervient. Elle est invariante par translation :

$$G(e^{i\theta}, e^{i\theta'}) = \frac{1}{2\pi} \log |e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} - e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}|^2 = \frac{1}{2\pi} \log(2 - 2\cos(\theta - \theta')).$$

Écrivons-la comme une série afin de la rapprocher du développement de Fourier du champ de coordonnées  $\eta$  sur le bord :

$$G = \log(1 - e^{-i\phi})(1 - e^{i\phi}) = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} (e^{im\phi} + e^{-im\phi}) = 2 \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \cos \phi,$$

$$\phi := \theta - \theta'.$$

La convolution entre  $G$  et sa dérivée seconde ne fait intervenir que les produits dont les facteurs portent la même fréquence, ce qui conduit au résultat

$$G \star \frac{d^2}{d\tau^2} G = \delta.$$

En écrivant le développement de  $\eta$  en modes de Fourier,

$$\eta(\theta) = \sum_{m \geq 1} (a_m \cos(m\phi) + b_m \sin(m\phi)),$$

on exprime l'intégrale fonctionnelle comme

$$Z(F) \sim \int \prod_{m \geq 1} da_m db_m \left( \prod_{k=1}^{13} e^{-(1+f_k^2)(a_m^2 + b_m^2)} \right) \sim \prod_{k=1}^{13} \prod_{m \geq 1} \frac{1}{1 + f_k^2} = \prod_{k=1}^{13} \sqrt{1 + f_k^2}.$$

Nous retrouvons donc pour l'action effective en présence d'un champ électromagnétique uniforme dans un espace plat, l'expression dictée par l'invariance de jauge et la covariance générale, proposée par Born et Infeld<sup>3</sup> pour l'électrodynamique non-linéaire d'un objet étendu :

$$\int d^{26}x \sqrt{\det(\delta_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})}.$$

## D-branes et action effective des supercordes

Dans le calcul de l'action effective des supercordes, on a affaire à une version supersymétrique de l'action classique et du couplage au champ électromagnétique, notés  $S_\Sigma[X, \psi]$  et  $S_{\partial\Sigma}[X, \psi, A]$ , incluant les partenaires fermioniques  $\psi$  des coordonnées  $X$  :

$$Z = \int DX D\psi e^{-S_\Sigma[X, \psi] - S_{\partial\Sigma}[X, \psi, A]}.$$

La contribution des fermions (hors le changement de la dimension de l'espace-cible, bien sûr) est un simple facteur jacobien valant 1, qui avait été incorrectement évalué dans un premier temps à cause de la considération de conditions aux limites périodiques inadaptées pour les

---

<sup>3</sup> et reconsidérée par Dirac dans un modèle de membrane destiné à évaluer la masse du muon ; cette action sera aussi appelée action de Dirac–Born–Infeld.



fermions. Ce fait se retrouvera plus loin dans des calculs plus précis d'intégrales fonctionnelles pour les cordes : le secteur de Neveu–Schwarz fournit l'action de Born–Infeld avec ses corrections, et le secteur de Ramond fournit l'action de Wess–Zumino avec ses corrections.

Afin de généraliser le calcul précédent au cas des supercordes, il convient de traduire les résultats exposés jusqu'ici dans le langage des D-branes. Pour fixer les notations, disons que nous cherchons l'action effective de la D9-brane de la théorie de type IIB.

Tout d'abord, étant donné le rôle de la T-dualité dans la géométrie des D-branes, voyons comment une action effective à la Born–Infeld en dix dimensions peut être interprétée en physique des particules après une série de T-dualités donnant lieu à l'action effective associée à une D0-brane. Nous savons que les champs de jauge sont remplacés par des déplacements transverses lorsqu'une transformation de T-dualité est effectuée dans une direction longitudinale :

$$A_\mu \longleftrightarrow \Phi^\mu.$$

En particulier, l'action associée à une D0-brane est la longueur de la ligne d'univers d'une particule relativiste, et la borne supérieure pour la vitesse de celle-ci est la réduction dimensionnelle du champ électrique critique [BP92]. La régularisation de la théorie de Maxwell donnée par le lagrangien de Born–Infeld est donc une conséquence naturelle des symétries de dualité des objets étendus de la théorie des cordes, pourvu que l'on parvienne à l'action de Born–Infeld pour les D9-branes.

### 3.3 Point de vue non-commutatif sur l'action de Born–Infeld

#### Un *educated guess* pour des champs constants

Il s'agit d'abord de récrire l'action de Born–Infeld en utilisant les paramètres de cordes ouvertes mis en évidence au moment de la discussion du propagateur et de la limite de Seiberg–Witten. Nous avons donc le fond de cordes fermées représenté par les deux tenseurs adaptés aux cordes ouvertes :

$$G^{\mu\nu} = \left( \frac{1}{g + 2\pi\alpha'B} g \frac{1}{g - 2\pi\alpha'B} \right)^{\mu\nu},$$

$$\Theta^{\mu\nu} = -2\pi\alpha' \left( \frac{1}{g + 2\pi\alpha'B} 2\pi\alpha'B \frac{1}{g - 2\pi\alpha'B} \right)^{\mu\nu}.$$

Le déterminant contenu dans la densité d'action de Born–Infeld se factorise de la façon suivante pour des tenseurs de champ de jauge  $F$  constants :

$$\mathcal{L}_{DBI} = \frac{1}{G_s} \sqrt{\det(1 + \theta F)} \sqrt{\det(G + 2\pi\alpha' \hat{F})}.$$

Nous avons utilisé la transformation de Seiberg–Witten pour les champs constants et la constante de couplage de cordes ouvertes définis par les relations

$$\hat{F} = \frac{F}{1 + \theta F},$$

$$G_s := g_s \sqrt{\det \left( 1 + \frac{G\theta}{2\pi\alpha'} \right)}.$$

Bien sûr il nous faut inverser la relation donnant  $\hat{F}$  en fonction de  $F$ , afin de trouver une véritable action non-commutative. L'effet de cette transformation consiste à inverser la contribution du pfaffien commutatif :

$$\mathcal{L}_{DBI} = \frac{1}{G_s} \frac{1}{\sqrt{\det(1 - \theta\hat{F})}} \sqrt{\det(G + 2\pi\alpha'\hat{F})}.$$

Il est important de garder à l'esprit le degré de précision de cette expression : c'est exactement le degré de précision de l'article de Fradkin et Tseytlin [FT85], puisque nous avons fait usage de la solution des équations de Seiberg–Witten à courbure constante. Cette hypothèse de champ constant signifie que tous les termes non gaussiens (en les fluctuations des coordonnées) dans une définition de l'action effective par intégrale de chemin ont été négligés.

Cette expression nous inspire une observation formelle, puisque le numérateur n'est autre que la densité de lagrangien de Dirac–Born–Infeld écrite avec la métrique de cordes ouvertes, le champ de jauge non-commutatif, la constante de couplage de corde ouverte, et sans le champ  $B$  antisymétrique. À la vue de la densité de lagrangien que nous venons d'écrire, nous avons un candidat naturel pour l'action de Born–Infeld non-commutative

$$\hat{S}_{DBI} := \frac{1}{G_s} \int dx \sqrt{\det(G + 2\pi\alpha'\hat{F})}.$$

Quelques remarques sur la structure même de cette action permettent de mieux se convaincre de la validité d'une telle redéfinition des champs, et de remarquer les imperfections de cette proposition. Nous avons négligé les dérivées de  $F$ . De manière effective, cette approximation équivaut à négliger les termes non-linéaires en  $\theta$ . En effet la solution en champ constant vérifie les équations obtenues en tronquant au premier ordre le développement en puissances  $\theta$  :

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} - F_{\mu\rho}\theta^{\rho\sigma}F_{\sigma\nu} + \mathcal{O}(\theta^2).$$

Cette corrélation entre l'ordre en  $\theta$  et l'ordre en dérivées provient du rapport entre le star-produit et les crochets de Poisson associés à  $\theta$  dans une approximation "semi-classique" :

$$[f, g]_* \sim_{\theta \rightarrow 0} \{f, g\}_\theta := \theta^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu g.$$

La théorie de jauge non-commutative le long du volume d'univers d'une D-brane est en effet reliée à la quantification des variétés de poisson à la Kontsevich [Kon03]. Cette relation a été développé par Cattaneo et Felder [CF00] ; dans la géométrie très simple que nous considérons dans ce mémoire, le star-produit est déjà explicite et nous n'aurons pas l'usage de l'expression diagrammatique élaborée par Kontsevich. C'est au contraire un affaiblissement du résultat (développement au premier ordre en  $\theta$ ) que nous sommes en train d'exposer. Cependant, l'argument de quantification des variétés de Poisson se révèle fécond en ce qui concerne le problème de redéfinition des champs de jauge. En effet, l'approximation semi-classique, au sens du développement au premier ordre en  $\theta$  et de l'utilisation des crochets de Poisson, fournit déjà des termes quadratiques dans le potentiel, à l'intérieur des transformations de jauge et de la courbure :

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu + \theta^{\rho\sigma} \partial_\rho \hat{A}_\mu \partial_\sigma \hat{A}_\nu.$$

Ce développement ordre par ordre en  $\theta$ , réalisant la correspondance de Seiberg et Witten, repose au niveau semi-classique sur le théorème de Darboux, comme l’a observé Cornalba [Cor00b, Cor00a]. La versatilité des expressions pour les champs de jauge est le reflet de l’invariance d’une forme symplectique, ici la deux-forme fermée  $B$ , par difféomorphisme. Le théorème de Darboux nous dit en effet qu’il n’existe localement qu’un modèle de forme symplectique, correspondant au tenseur antisymétrique diagonal par blocs

$$\sum_i dx^{2i} \wedge dx^{2i+1}.$$

Le groupe de jauge au niveau des crochets de Poisson est le groupe des symplectomorphismes. Il est au groupe de jauge de la théorie abélienne non-commutative de Yang–Mills ce que le théorème de Darboux est au théorème de Kontsevich. Nous ne poursuivrons pas plus avant cette approche par quantification des crochets de Poisson, mais nous garderons à l’esprit le fait que le développement en puissances de  $\theta$  est compatible avec les arguments de Seiberg et Witten sur les orbites de jauge non-commutatives. Nous allons nous concentrer sur l’invariance de jauge, qui imposera des contraintes suffisamment fortes pour obtenir une solution au problème de redéfinition des champs de jauge à tous les ordres en  $\theta$ .

Un problème plus terre-à-terre nous vient du facteur  $\sqrt{\det(1 - \theta \hat{F})}$ , qu’il faudra bien interpréter, et intégrer dans une version plus aboutie de l’action effective. Remarquons tout de suite que la solution à ce problème ne se trouve pas dans le cadre des champs de jauge à courbure constante. Elle est forcément au-delà de l’approximation de l’article [FT85], puisque l’action écrite est infinie pour une D-brane de volume infini équipée d’un tenseur du champ de jauge constant. Cette action n’est donc pas un outil valide pour l’étude de la dynamique des D-branes. Certes, l’électrodynamique non-commutative provient du développement à l’ordre deux dans le champ de jauge,

$$\hat{S}_{DBI} \sim_{\hat{F} \rightarrow 0} -\frac{1}{4} \int dx \hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} + o(\hat{F}^2),$$

mais tous les modes de Fourier de  $\hat{F}$  doivent être pris en compte pour pouvoir considérer de tels résultats comme des propriétés physiques raisonnables d’une action. Nous allons voir que l’invariance de jauge pour des champs variables donnera accès à la fois à une expression satisfaisante pour l’action effective non-commutative, et à une expression plus précise dans le cadre commutatif.

## Champs variables et restauration de l’invariance de jauge

Les ondes planes sur un espace non-commutatif sont intimement liées aux opérateurs de translation, puisque l’expression la plus simple de la non-localité est liée à une translation dépendant du mode de Fourier :

$$e^{ikx} * x^\mu = (x^\mu + \theta^{\mu\nu} k_\nu) * e^{ikx}.$$

Pour un paramètre de jauge  $\lambda$ , une transformation de jauge de la courbure non-commutative, même dans le cas abélien, s’écrit à l’aide d’un commutateur,

$$\delta \hat{F}_{\mu\nu}(x) = i[\lambda, \hat{F}_{\mu\nu}]_*$$

Cette relation n'est guère maniable que si nous distinguons entre les différents modes de Fourier du paramètre de jauge,

$$\lambda(x) = \int dk e^{ikx} \tilde{\lambda}(k),$$

de sorte que la transformation de jauge de la courbure est directement liée à l'étalement de l'effet du mode d'impulsion  $k$  entre les points  $x$  et  $x + \theta k$  :

$$\begin{aligned} [\lambda(x), F_{\mu\nu}(x)] &= \int dk \tilde{\lambda}(k) [e^{ikx}, \hat{F}_{\mu\nu}(x)] \\ &= \int dk \tilde{\lambda}(k) (\hat{F}_{\mu\nu}(x + \theta k) - \hat{F}_{\mu\nu}(x)) * e^{ikx}. \end{aligned}$$

Bien que nous ayons commencé cette discussion des actions effectives par le terme de Born-Infeld, cette observation est valable pour toute théorie effective utilisant le produit de Moyal et des symétries de jauge : la transformation du lagrangien (densité exprimée en fonction du point de l'espace-temps) n'est pas immédiatement invariante de jauge. Le développement de Fourier peut cependant nous laisser l'espoir d'une densité invariante de jauge dans l'espace de Fourier. Il suffira alors de superposer les différents modes pour obtenir par synthèse de Fourier une théorie de jauge non-commutative. Nous considérons donc les modes de Fourier du lagrangien définis par la relation

$$\mathcal{L}(k) = \int dx \mathcal{L}(x) * e^{ikx}.$$

Le seul mode invariant de jauge d'un lagrangien est le mode d'impulsion nulle. Considérons une transformation de jauge finie dont le générateur est le paramètre décrit précédemment :

$$U_\lambda(x) := \exp_*(i\lambda(x)) = \sum_{n \geq 0} \frac{i^n}{n!} (*\lambda(x))^n.$$

Pour un lagrangien  $\hat{\mathcal{L}}$  exprimé en fonction de la courbure de jauge  $\hat{F}$ , cette transformation aura dans l'espace direct l'effet

$$\hat{\mathcal{L}}(x) \rightarrow U_\lambda(x) * \hat{\mathcal{L}}(x) * U_{-\lambda}(x),$$

de sorte que nous pouvons écrire la transformation d'un mode de Fourier d'une manière qui pénalise toute impulsion non nulle :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}(k) &\rightarrow \int dx U_\lambda(x) * \hat{\mathcal{L}}(x) * U_{-\lambda}(x) * e^{ikx} \\ &= \int dx U_\lambda(x) * \hat{\mathcal{L}}(x) * e^{ikx} * U_{-\lambda}(x - \theta k) \\ &= \int dx U_{-\lambda}(x - \theta k) * U_\lambda(x) * \hat{\mathcal{L}}(x) * e^{ikx}. \end{aligned}$$

La dernière équation fait usage de la cyclicité de cette trace qu'est l'intégrale sur l'espace non-commutatif. Le recours au potentiel de jauge (non-commutatif) apporte un remède homéopathique au manque d'invariance de jauge, via un transport parallèle, selon la prescription issue des résultats de Gross, Hashimoto et Itzhaki [GHI00] sur l'invariance de jauge non-commutative.

En effet, un opérateur de transport parallèle (ligne de Wilson) le long d'un segment joignant les points  $x$  et  $x + \theta k$  n'est pas invariant de jauge, à cause du caractère ouvert du segment. Les transformations de jauge agissent aux deux extrémités, compensant les transformations du mode  $\hat{\mathcal{L}}(k)$ . La version non-commutative de l'action de Born–Infeld s'écrit donc

$$\hat{S}_{DBI} = \frac{1}{g_s} \int dx \left\{ \sqrt{\det(1 - \theta \hat{F})} \sqrt{\det \left( g + \hat{F} \frac{1}{1 - \theta \hat{F}} \right)} * \exp \left( -i \int_x^{x+\theta k} \hat{A}_\mu dx^\mu \right) \right\} * e^{ikx},$$

résultat qui s'exprime plus simplement en définissant la prescription d'intégration  $L_*$ , qui effectue une moyenne sur toutes les façons d'insérer des objets le long d'une ligne de Wilson  $W_k$ , tendue entre les point  $x$  et  $x + \theta k$  :

$$\hat{S}_{DBI} = \frac{1}{g_s} \int dx L_* \left\{ \sqrt{\det(1 - \theta \hat{F})}, \sqrt{\det \left( g + B + \hat{F} \frac{1}{1 - \theta \hat{F}} \right)}, W_k \right\} * e^{ikx}.$$

Nous allons écrire le terme de Chern–Simons non-commutatif en nous inspirant de ce résultat.

### 3.4 Couplages de Ramond–Ramond

#### Description non-commutative

Une théorie non-commutative des champs vit donc le long du volume d'univers de la D-brane, sur un fond de champ de magnétique constant. Les D-branes se couplant aux champs de formes différentielles du secteur de Ramond–Ramond, il est naturel de rechercher les conséquences de la non-commutativité sur ces couplages. En partant du principe que les termes de Wess–Zumino possèdent une description non-commutative, nous serons naturellement conduits à une solution des équations de Seiberg–Witten. Cette démarche est entièrement fondée sur des arguments de symétrie : invariance de jauge et dualité entre les descriptions commutative et non-commutative.

Nous allons écrire les termes de couplage aux champs de Ramond–Ramond issus de la théorie des champs non-commutatifs [MS00]. Le long des D-branes instables, de tels couplages font intervenir des tachyons, dont le rôle dans les transitions de phase vers un vide stable de la théorie des cordes (condensation de tachyons) est l'une des grandes idées contemporaines de la théorie des cordes. La non-commutativité pour les scalaires tachyoniques, ainsi que les actions effectives induites, feront l'objet du chapitre 5.

La recette apprise en théorie bosonique, c'est-à-dire avec l'action effective de Born–Infeld comme fonction de partition à l'ordre du disque [FT85], consiste à changer de coordonnées d'intégration,

$$x^\mu \mapsto X^\mu := x^\mu + \theta^{\mu\nu} \hat{A}_\nu,$$

$$[X^\mu, X^\nu] = \theta^{\mu\nu} - \theta^{\mu\rho} \hat{F}_{\rho\sigma} \theta^{\sigma\nu} =: (Q^{-1})^{\mu\nu},$$

et à considérer l'ancien lagrangien avec les anciens champs comme un lagrangien pour les champs de jauge non-commutatifs ; bien sûr, tous les produits sont des  $*$  de Moyal de paramètre  $Q$ , et la relation entre les champs commutatifs et non-commutatifs est non-linéaire. Afin d'obtenir une densité de lagrangien dépendant explicitement des champs de jauge non-commutatifs,

tout en conservant les coordonnées  $x^\mu$  et le paramètre de non-commutativité  $\theta^{\mu\nu}$ , on peut de manière équivalente insérer un facteur

$$\int dx \longrightarrow \int_{\mathbf{R}_\theta^9} dx \frac{\text{Pf}Q}{\text{Pf}\theta},$$

dans la mesure d'intégration. Quant aux champs de jauge, ils sont encore reliés par l'intermédiaire de la quantité invariante

$$B + F = Q^{-1}.$$

C'est le chemin que nous allons suivre pour écrire les termes de Wess–Zumino. Dire qu'il existe une théorie de jauge non-commutative de paramètre  $\theta^{\mu\nu}$  couplée aux champs de Ramond–Ramond sur la D9-brane stable de type IIB, en présence d'un champ de fond  $B$ , revient à affirmer<sup>4</sup>

$$\hat{S}_{CS} = T_9 \int_{\mathbf{R}_\theta^9} \frac{\text{Pf}Q}{\text{Pf}\theta} C \wedge e^{Q^{-1}}.$$

pour des champs de jauge uniformes. La combinaison invariante  $Q$ , qui vaut  $B + F$  dans la description commutative, est là pour nous rappeler que le tenseur  $B$  ne peut pas être éliminé sans créer un photon sur le volume d'univers.

## Solution des équations de Seiberg–Witten

Avec l'expérience des champs variables que nous avons acquise, nous pouvons avancer, suivant les travaux de Liu [Liu01], Mukhi et Suryanarayana [MS01] qu'une solution des équations de Seiberg–Witten est donnée par le couplage au champ de formes différentielles  $C^{(8)}$  de Ramond–Ramond :

$$F_{\mu\nu}(k) = \int dx L_* \left( \frac{\text{Pf}Q}{\text{Pf}\theta}, \hat{F} \frac{1}{1 - \theta \hat{F}}, W_k(x) \right) * e^{ikx}.$$

Ooguri et Okawa ont démontré cette conjecture [OO01] en vérifiant l'invariance de jauge, l'identité de Bianchi et la condition initiale.

Il est donc avéré que les termes de Born–Infeld [DT01] et de Chern–Simons<sup>5</sup> possèdent la description non-commutative

$$\hat{S}_{DBI} = \int dx L_* \left( \frac{\text{Pf}Q}{\text{Pf}\theta}, \sqrt{g + Q^{-1}}, W_k(x) \right) * e^{ikx},$$

$$\hat{S}_{CS} = C(-k) \wedge \int dx L_* \left( \frac{\text{Pf}Q}{\text{Pf}\theta}, e^{Q^{-1}}, W_k(x) \right) * e^{ikx}.$$

Il est cependant manifeste que nous n'avons pas extrait toute l'information contenue dans cette action, en particulier à cause de la multiplicité des termes dans les couplages

<sup>4</sup>Dans ce contexte, l'intégrale est définie par dualité à partir de l'algèbre extérieure des coordonnées, qui n'est pas modifiée par le produit de Moyal ; la quantité  $C$  désigne la somme formelle de tous les champs de formes différentielles de Ramond–Ramond en type IIB ; la quantité  $Q^{-1}$  désigne la 2-forme associée  $Q_{\mu\nu}^{-1} dx^\mu \wedge dx^\nu$  ; l'exponentielle est développée formellement et l'intégration sélectionne les termes de degré maximal.

<sup>5</sup>L'action de Born–Infeld que nous écrivons est en fait le couplage au mode d'impulsion  $k$  du dilaton.

de Ramond–Ramond. Le couplage à  $C^{(8)}$  ne reçoit pas de corrections faisant intervenir les dérivées de  $F$ , puisque de telles corrections peuvent être localement intégrées pour donner une forme différentielle de degré un, qui peut être absorbée par définition du champ de jauge. Cet arbitraire ayant été exploité pour écrire la solution au problème de Seiberg–Witten, les couplages aux champs de Ramond–Ramond de degré plus faible vont recevoir des corrections prescrites par la non-commutativité. Ces corrections font l’objet du chapitre suivant. Quant au couplage à  $C^{(10)}$ , il ne fait pas intervenir le champ de jauge dans la description commutative et fournit donc une identité topologique concernant la théorie de jauge non-commutative. Nous retrouverons au chapitre 6 un exemple de cette situation au moment de la discussion des D-branes topologiques non-commutatives du modèle B.

## Chapitre 4

# Corrections dérivatives

*Dans ce chapitre, je présente les prédictions issues de la non-commutativité pour les corrections dérivatives à l'action effective des champs de jauge abéliens. Le calcul de ces corrections en théorie commutative est un exercice qui n'avait été fait auparavant qu'à un ordre fini en dérivées. Je reproduis, par simple utilisation des conditions de bord, les prédictions de la théorie de jauge non-commutative pour les termes de Chern–Simons et de Born–Infeld, dans la limite de Seiberg–Witten. Je prolonge ensuite le calcul des couplages aux champs de Ramond–Ramond au-delà de cette limite, en tenant compte du terme symétrique dans le propagateur des champs scalaires. J'interprète ce résultat comme la réalisation sur le bord de la surface d'univers d'une théorie de jauge non-commutative déformée par la métrique.*

### 4.1 Les star-produits modifiés, leur origine non-commutative

Suivant Liu [Liu01], nous développons en puissances du champ de jauge des expressions du chapitre précédent pour les actions effectives dans la description non-commutative. À chaque ordre  $n$  est associé un opérateur différentiel  $*_n$ , ou star-produit modifié d'ordre  $n$ . La relation entre les différents ordres est bien entendu intimement liée à l'invariance de jauge, laquelle est responsable de l'apparition de la ligne de Wilson. Ces produits sont en quelque sorte des descendants du produit de Moyal, et avaient été obtenus pour les rangs  $n = 2, 3$  dans les premières étapes [DT01] du calcul de l'application de Seiberg–Witten. Ils contiennent tous une infinité de dérivées, et sont donc susceptible de prolonger aux grands ordres en dérivées les résultats obtenus systématiquement aux faibles ordres [AT88] sans faire appel à la notion de théorie de jauge non-commutative.

Nous rappelons donc que  $W_k$ , ligne de Wilson tendue entre les points  $x$  et  $x + \theta k$ , permet par un transport parallèle d'assurer l'invariance de jauge de quantités définies en théorie de jauge non-commutative. Le segment est le chemin le plus simple que l'on puisse fabriquer dimensionnellement à partir d'un mode de Fourier  $k$  et de l'échelle de non-commutativité  $\theta$ . Nous utilisons la notation suivante :

$$W_k(x) = P_* \exp \left( i \int_0^1 d\tau \theta^{\mu\nu} k_\nu \hat{A}_\mu(x + \tau \theta k) \right).$$

Avec un produit de champs non-commutatifs  $O_i, 1 \leq i \leq N$ , obtenus par transformation de Seiberg–Witten de champs constants, la prescription de moyenne qui consiste à attacher les différentes observables de la manière la plus simple possible pour adapter les observables



à la non-localité, est désignée par  $L_*$ , et définie par la relation donnant le mode d'impulsion  $k$  du produit d'observables :

$$Q(k) = \int dx \left( \prod_{i=1}^N \int_0^1 d\tau_i \right) P_* \left( W(x), \prod_{i=1}^N O_i(x + \tau_i \theta k) \right).$$

Le transport parallèle le long du segment de Wilson induit un développement en puissances du champ de jauge  $\hat{A}$  :

$$Q(k) = \sum_{p \geq 0} Q_p(k, \hat{A}),$$

où  $Q_p(k, \hat{A})$  reçoit une contribution d'ordre  $p$  en  $\hat{A}$  du développement de la ligne de Wilson. Considérons d'abord le terme d'ordre 0. En écrivant les observables  $O_i$  dans l'espace des impulsions, et en intégrant sur l'espace des positions, Liu a obtenu [Liu01] la formule plus symétrique en les arguments,

$$Q_0(k) = \left( \prod_{i=1}^N \int \frac{dk_i}{(2\pi)^d} \delta(k - \sum_{i=1}^N k_i) \right) \prod_{i=1}^N O_i(k_i) J_N(k_1, \dots, k_N).$$

sur laquelle on lit le noyau d'intégration qui correspond dans l'espace de Fourier à l'opérateur  $*_n$  :

$$J_N(k_1, \dots, k_N) := \left( \prod_{i=1}^N \int_0^1 d\tau_i \right) \exp \left( -\frac{i}{2} \sum_{i < j} k_{\mu,i} \theta^{\mu\nu} k_{\nu,j} (2\tau_{ij} - \epsilon(\tau_{ij})) \right),$$

qui se lit dans l'espace des positions comme un opérateur différentiel agissant sur  $N$  arguments :

$$*_N := \left( \prod_{i=1}^N \int_0^1 d\tau_i \right) \exp \left( -\frac{i}{2} \sum_{i < j} \partial_{\mu,i} \theta^{\mu\nu} \partial_{\nu,j} (2\tau_{ij} - \epsilon(\tau_{ij})) \right).$$

En particulier, on a dans l'espace des positions :

$$*_2 = \frac{\sin \left( \frac{1}{2} \partial_{\mu} \theta^{\mu\nu} \partial'_{\nu} \right)}{\frac{1}{2} \partial_{\mu} \theta^{\mu\nu} \partial'_{\nu}}$$

Les corrections que nous allons calculer dans ce chapitre sont codées par ces opérateurs, et certaines de leurs déformations, notées  $\tilde{*}_n$ , qui sont apparues dans [MS02] au rang  $n = 2$ , et que j'ai généralisées aux ordres supérieurs dans [Gra04c].

## 4.2 Corrections dérivatives aux actions effectives : le point de vue commutatif

Plusieurs voies ont été explorées pour calculer les couplages des modes légers de la théorie des cordes. Il y a la méthode de la matrice de diffusion, qui consiste à évaluer des amplitudes de diffusion avec les modes en question pour états asymptotiques. L'action effective est alors une fonctionnelle qui reproduit les amplitudes. Il y a la méthode dite de la fonction  $\beta$  de renormalisation : elle consiste à évaluer le flot de renormalisation des couplages de cordes comme modèle sigma non-linéaire ; l'équation  $\beta = 0$ , qui commande l'invariance conforme, est alors

interprétée comme équation du mouvement pour les différents champs, dérivant d'une certaine fonctionnelle. Notre approche sera davantage liée à la méthode dite de la fonction de partition, via la technique des états de bord, plus adaptée au point de vue sur les D-branes comme états étendus. Les couplages effectifs du secteur de jauge sont des éléments de matrice d'un opérateur qui allume le champ de jauge le long du volume d'univers de la D-brane.

Les relations algébriques [CLNY87] vérifiées par un état de bord ne sont autres que les conditions de bord habituelles, considérées non pas comme des équations aux dérivées partielles, mais comme des opérateurs annihilant un état  $|B\rangle$ . Une condition de Neumann s'écrit

$$P_\mu |B\rangle = 0,$$

et une condition de Dirichlet

$$\partial_\tau X^\mu |B\rangle = 0,$$

alors qu'en présence d'un champ électromagnétique de fond, l'état de bord étant noté  $|B(F)\rangle$ , on a la relation

$$(P_\mu + F_{\mu\nu} \partial_\tau X^\nu) |B(F)\rangle = 0,$$

qui est en fait une définition de l'état de bord  $|B(F)\rangle$ , ou plutôt de sa partie bosonique. Cette équation peut être résolue en fonction de l'état de bord  $|B\rangle$  avec conditions de Neumann dans toutes les directions et sans champ de jauge

$$|B(F)\rangle = \exp \left( -\frac{i}{2\pi\alpha'} \int d\tau \partial_\tau X^\mu A_\mu(X(\tau)) \right) |B\rangle,$$

dont la partie supersymétrique s'obtient en substituant des super-champs et des super-dérivées aux objets usuels.

$$|B(F)\rangle = \exp \left( -\frac{i}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\theta D\phi^\mu A_\mu(\phi) \right) |B\rangle,$$

$$\phi^\mu := X^\mu + \theta\psi^\mu,$$

$$D := \partial_\theta - \theta\partial_\tau.$$

Pour expliciter les deux termes de l'action effective, il faut calculer les deux intégrales de chemin à l'ordre du disque correspondant aux quantités

$$\langle 0 | \exp \left( -\frac{i}{2\pi\alpha'} \int d\tau \partial_\tau \phi^\mu A_\mu(\phi) \right) |B\rangle_R = \int C \wedge e^F + \Delta S_{CS},$$

$$\langle C | \exp \left( -\frac{i}{2\pi\alpha'} \int d\tau \partial_\tau \phi^\mu A_\mu(\phi) \right) |B\rangle_{NS} = \int dx \sqrt{\det(g + F)} + \Delta S_{DBI}.$$

Les indices R et NS indiquent le secteur de Ramond (avec conditions de bord périodiques pour les fermions, qui autorisent un mode de fréquence nulle) et le secteur de Neveu-Schwarz (avec conditions anti-périodiques, qui interdisent les modes de fréquence nulle). Le développement de Taylor du champ de jauge est un développement en puissances de l'opérateur de dérivation agissant sur ce champ, et en puissances des fluctuations des coordonnées, lesquelles seront intégrées par contractions de Wick. Dans le secteur de Neveu-Schwarz, ce développement ne comporte que la première somme de contributions :

$$\begin{aligned} \int d\sigma d\theta D\phi^\mu A_\mu(\phi) = & - \int d\sigma d\theta \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)!} \frac{k+1}{k+2} D\tilde{\phi}^\nu \tilde{\phi}^\mu \tilde{\phi}^{\mu_1} \dots \tilde{\phi}^{\mu_k} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_k} F_{\mu\nu}(x) + \\ & - \int d\sigma (\tilde{\psi}^\mu \psi_0^\nu + \psi_0^\mu \psi_0^\nu) \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \tilde{X}^{\mu_1} \dots \tilde{X}^{\mu_k} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_k} F_{\mu\nu}(x). \quad (4.1) \end{aligned}$$

Quant aux corrections dépendant des dérivées du champ de jauge, elles tiennent essentiellement à la structure de la théorie des cordes, alors que l'action de Born–Infeld est dictée par l'invariance de jauge et la covariance générale. Nous utiliserons ce développement de Taylor tout au long du chapitre pour évaluer les corrections en théorie *commutative* des cordes.

### 4.3 Prédictions non-commutatives

À présent que la redéfinition des champs de jauge a été explicitée conformément aux équations de Seiberg–Witten, il est naturel de demander que l'action effective tout entière, et pas seulement le couplage à  $C^{(8)}$ , admette une expression non-commutative. Cette expression est remarquablement concise et géométrique, grâce à la prescription d'intégration de long de la ligne de Wilson ouverte. Cependant, un développement en dérivées est induit dans le langage commutatif, qui a beaucoup moins de structure apparente, et prend beaucoup plus de place. Ce développement constitue une solution simple à un problème compliqué, celui de l'évaluation des corrections dérivatives aux grands ordres en dérivées. C'est ce qu'ont expliqué Das, Mukhi et Suryanarayana [DMS01].

Les corrections à l'action de Dirac–Born–Infeld viennent du couplage au dilaton (étudié dans l'espace des impulsions sous la forme de ses modes  $\tilde{D}(k)$  dans le secteur de Neveu–Schwarz), tandis que les couplages aux modes de Fourier des champs  $C^{(2p)}$ , pour  $p \leq 3$ , constituent les termes dits de Chern–Simons. La limite de Seiberg–Witten fait tendre vers 0 toutes les corrections dans lesquelles les dérivées sont accompagnées d'un facteur  $\alpha'$ . Quant aux termes dans lesquels les dérivées sont accompagnées de tenseurs  $\theta$ , il se trouvent en nombre infini dans les actions non-commutatives, mais ce ne sont pas des corrections dans la description non-commutative ! Ils deviennent des corrections lorsque l'expression est traduite dans le langage commutatif. C'est le sens des équations

$$S_{CS} + \Delta S_{CS} = \hat{S}_{CS},$$

$$S_{DBI} + \Delta S_{DBI} = \hat{S}_{DBI}.$$

Explicitement, l'analogue de (l'inverse de)  $B + F$ , soit

$$Q^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} - \theta^{\mu\rho} \hat{F}_{\rho\sigma} \theta^{\sigma\nu},$$

contient la contribution du tenseur  $\hat{F}$ , de sorte que

$$S_{DBI} + \Delta S_{DBI} = \frac{\tilde{D}(-k)}{g_s} \int d^{10}x L_* \left( \frac{\text{Pf}Q}{\text{Pf}\theta}, \sqrt{\det(g + 2\pi\alpha' Q^{-1})}, W_k(x) \right) * e^{ikx},$$

$$S_{CS} + \Delta S_{CS} = \tilde{C}(-k) \wedge \int L_* \left( \frac{\text{Pf}Q}{\text{Pf}\theta}, e^{2\pi\alpha' Q^{-1}}, W_k(x) \right) * e^{ikx}.$$

Le star-produit modifié  $*_{2p}$  intervient dans l'expression du couplage proportionnel à  $F^p$ , dans la limite de Seiberg–Witten (notée SW) suivant la formule corrigeant le couplage au caractère de Chern, dans l'espace des positions :

$$(S_{CS} + \Delta S_{CS})|_{SW} = \int C \wedge \sum_{p \geq 2} \frac{1}{p!} *_p [F^p].$$

Quant au terme de Dirac–Born–Infeld, il a été développé à l'ordre quadratique en  $\hat{F}$  dans [DMS01], ce qui fournit le développement suivant, toujours dans l'espace des positions :

$$(S_{DBI} + \Delta S_{DBI})|_{SW} = \frac{1}{g_s} \int d^{10}x \sqrt{\det(g + 2\pi\alpha' B)} \left( 1 + \frac{1}{4} \theta^{\mu\nu} \theta^{\rho\sigma} *_2 [F_{\nu\rho}, F_{\sigma\mu}] - \frac{1}{8} \theta^{\mu\nu} \theta^{\rho\sigma} *_2 [F_{\mu\nu}, F_{\rho\sigma}] \right).$$

J'ai établi cette dernière relation dans [Gra03], ce qui constitue le premier calcul direct de corrections à tous les ordres en dérivées à l'action de Born–Infeld. Étant donné le rôle prépondérant joué par le secteur de Ramond dans la suite de cette thèse, je ne passerai en revue que le calcul de  $\Delta S_{CS}$ , renvoyant au premier article figurant en annexe pour celui de  $\Delta S_{DBI}$ . La différence essentielle tient à l'absence des modes de fréquence nulle pour les fermions, ce qui impose d'effectuer des calculs avec le propagateur complet, incluant les partenaires supersymétriques des coordonnées. Dans le texte de cette thèse, nous n'aurons besoin que du propagateur des scalaires. De plus, seule l'action  $S_{CS}$  a été étudiée au-delà de la limite de Seiberg–Witten.

## 4.4 Calcul en théorie (commutative) des cordes

Nous avons évoqué, via la dualité non-commutative, un argument de symétrie, qui s'avère fécond pour la déduction de termes correctifs au secteur de jauge dans les actions effectives. Il est cependant naturel de poursuivre l'évaluation de l'intégrale de chemin, afin de déceler l'existence de ces termes dans l'approche (commutative) de Fradkin et Tseytlin. Écrivons la théorie de jauge effective comme le résultat de l'intégrale de chemin à l'ordre du disque.

Mukhi a retrouvé l'expression de  $*_2$  par un calcul direct à l'aide d'états de bord [Muk02] pour le terme se couplant à  $C^{(6)}$ . J'ai montré par récurrence dans [Gra03] comment les star-produits modifiés d'ordre supérieur apparaissent dans ce formalisme. J'ai en effet calculé dans l'article [Gra03] les termes de  $2p$ -forme d'ordre  $p$  en  $F$  dans l'action de Chern–Simons, de manière à corriger le couplage au caractère de Chern. L'organisation du calcul dans le secteur de Ramond repose sur le fait suivant : les relations d'anticommutation entre les modes zéro des fermions reproduisent l'algèbre extérieure des formes différentielles dans l'espace-cible plat.

$$\{\psi_0^\mu, \psi_0^\nu\} = \delta^{\mu\nu},$$

$$\psi^\mu \longleftrightarrow dx^\mu.$$

C'est cette même identification qui est utile pour calculer des invariants topologiques tels que l'indice de Witten à partir d'une théorie supersymétrique [Wit82]. Nous devons donc extraire  $2p$  modes de fréquence nulle  $\psi_0$  de fermions et  $p$  puissances du champ de jauge, de

la quantité suivante dans le secteur de Ramond, qui est égale à l'action de Chern–Simons complète, corrections incluses :

$$\langle C | \exp \left( -\frac{i}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\theta D\phi^\mu A_\mu(\phi) \right) | B \rangle_R.$$

Nous effectuerons la substitution

$$\langle C | \frac{1}{2} \psi_0^\mu \psi_0^\nu F_{\mu\nu} | B \rangle_R \longrightarrow -i\alpha' F$$

à la fin du calcul.

Il y a donc, dans le développement de l'exponentielle en puissances de  $F$ , des termes quadratiques, auxquels nous allons d'abord nous intéresser, afin d'illustrer l'approche et d'initialiser la récurrence qui va suivre :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{i}{2\pi\alpha'} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\sigma_1 \int_0^{2\pi} d\sigma_2$$

$$\langle C | \left( \frac{1}{2} \psi_0^\mu \psi_0^\nu \right) \left( \frac{1}{2} \psi_0^\alpha \psi_0^\beta \right) \sum_{n \geq 0} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{p!} \tilde{X}^{\lambda_1} \dots \tilde{X}^{\lambda_n} \tilde{X}^{\rho_1} \dots \tilde{X}^{\rho_p} \partial_{\lambda_1} \dots \partial_{\lambda_n} F_{\mu\nu} \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_p} F_{\alpha\beta} | B \rangle_R.$$

Ces termes quadratiques donnent bien l'expression de  $*_2$  par sélection des termes réguliers avec  $n = p$  dans la double somme [Muk02]. En effet, le propagateur des scalaires est proportionnel à  $\theta^{\mu\nu}$  dans la limite de Seiberg–Witten,

$$\langle X^\mu(\sigma_1) X^\nu(\sigma_2) \rangle \mapsto \frac{\theta^{\mu\nu}}{2\pi\alpha'} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1 - e^{-\epsilon + i\sigma_{12}}}{1 - e^{-\epsilon + i\sigma_{12}}} \right) = i(\sigma_{12} - \pi),$$

et les contractions donnent un facteur combinatoire de  $n!$  qui compte les appariements, alors que l'intégrale par rapport aux abscisses  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sélectionne les termes avec un nombre pair de dérivées agissant sur chaque champ  $F$ . Le couplage de degré quatre comme forme différentielle, et quadratique dans les champs de jauge, se lit donc :

$$\begin{aligned} (S_{CS} + \Delta S_{CS})|_{(2)} &= \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p (\alpha')^{2p}}{(2p)!} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} (\sigma_\pi)^{2p} \prod_{k=1}^{2p} \theta^{\mu_k \nu_k} \partial_{\mu_i} \partial'_{\nu_i} F(x) \wedge F(x')|_{x'=x} \quad (4.2) \\ &= \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{2^{2p} (sp+1)!} \theta^{\mu_1 \nu_1} \dots \theta^{\mu_{2p} \nu_{2p}} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{2p}} F \wedge \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_{2p}} F \\ &= \frac{\sin(\frac{1}{2} \partial_\mu \theta^{\mu\nu} \partial'_\nu)}{\frac{1}{2} \partial_\mu \theta^{\mu\nu} \partial'_\nu} F \wedge F|_{x'=x} \\ &= F *_2 \wedge F. \end{aligned}$$

Il s'agit à présent de montrer par récurrence comment les opérateurs différentiels de rang supérieur peuvent se déduire des termes du développements contenant des puissances supérieures de  $F$ . Le principe de la preuve est une représentation graphique des contractions de Wick, dont le facteur de symétrie doit venir compenser les factorielles intervenant au

dénominateur via le développement de la fonction exponentielle. À l'ordre  $K$  dans le champ de jauge, pour chaque terme contenant des puissances des fluctuations de scalaires, nous avons  $K$  nuages de points bien séparés; à chaque nuage est associé l'un des tenseurs  $F$ , et le nuage compte autant de points qu'il y a d'opérateurs  $\tilde{X}^\lambda \partial_\lambda$  agissant sur le tenseur  $F$  en question. Une contraction de Wick est symbolisée par un trait reliant deux points. Nos termes réguliers sont ceux qui sont symbolisés par un graphe dans lequel tous les points sont connectés par paires (un point ne peut être l'extrémité que d'un seul trait), et où les traits relient toujours des nuages différents. Il est instructif de refaire explicitement une étape  $K = 3$ , non pas pour initier la récurrence mais pour gagner un peu de pratique et fixer les notations.

Il nous reste à compter les graphes permis, afin de connaître le facteur de symétrie intervenant dans l'évaluation de la triple somme

$$\begin{aligned} (S_{CS} + \Delta S_{CS})|_{(4)} &= \frac{1}{3!} \sum_{n \geq 0} \sum_{p \geq 0} \sum_{q \geq 0} \left( \frac{i}{\lambda} \right)^3 \int_0^{2\pi} d\sigma_1 \int_0^{2\pi} d\sigma_2 \int_0^{2\pi} d\sigma_3 \\ &\langle C | \left( \frac{1}{2} \psi_0^\mu \psi_0^\nu \right) \left( \frac{1}{2} \psi_0^\alpha \psi_0^\beta \right) \left( \frac{1}{2} \psi_0^\kappa \psi_0^\tau \right) \times \\ &\frac{1}{n!} \tilde{X}^{\lambda_1}(\sigma_1) \dots \tilde{X}^{\lambda_n}(\sigma_1) \frac{1}{p!} \tilde{X}^{\rho_1}(\sigma_2) \dots \tilde{X}^{\rho_p}(\sigma_2) \frac{1}{q!} \tilde{X}^{\phi_1}(\sigma_3) \dots \tilde{X}^{\phi_q}(\sigma_3) \times \\ &\partial_{\lambda_1} \dots \partial_{\lambda_n} F_{\mu\nu}(x) \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_p} F_{\alpha\beta}(x) \partial_{\phi_1} \dots \partial_{\phi_q} F_{\kappa\tau}(x) |B\rangle_R . \end{aligned}$$

Nous désignerons les nuages par les lettres grecques provenant des groupes d'indices. Nous avons donc affaire à trois nuages, notés  $\{\lambda\}$ ,  $\{\rho\}$  et  $\{\phi\}$ . Avec des notations adaptées à la formule ci-dessus, il y a  $A + C$  indices dans  $\{\lambda\}$ ,  $A + B$  indices dans  $\{\rho\}$ , et  $B + C$  indices dans  $\{\phi\}$ ; nous choisissons  $A$  indices du nuage  $\{\lambda\}$  à contracter avec des points du nuage  $\{\rho\}$ . Nous effectuons les contractions correspondantes à l'aide du propagateur  $D^{\lambda\rho}(\sigma_{12})$ . Il y a  $C_{A+C}^A \times (A + B)!/B!$  manières d'effectuer ces contractions. Il reste  $B$  indices dans le nuage  $\rho$ , à contracter avec  $B$  indices du nuage  $\phi$  à l'aide du propagateur  $D^{\rho\phi}(\sigma_{23})$ . Il y a  $(B + C)!/C!$  manières d'effectuer ces contractions. Il ne reste alors que  $C$  points libres dans  $\{\rho\}$  et  $\{\phi\}$ , et les contractions à l'aide du propagateur  $D^{\phi\lambda}(\sigma_{13})$  apportent un dernier facteur de symétrie égal à  $C!$ . Nous trouvons donc au numérateur le produit de trois factorielles qui venaient du développement de l'exponentielle :

$$\frac{(A + C)!}{A!C!} \times \frac{(A + B)!}{B!} \times \frac{(B + C)!}{C!} \times C!.$$

Le dénominateur, à l'intérieur de la triple somme, est donc réorganisé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (S_{CS} + \Delta S_{CS})|_{(4)} &= \frac{1}{3!} \sum_{A \geq 0} \sum_{B \geq 0} \sum_{C \geq 0} \left( \frac{i}{\lambda} \right)^3 \int_0^{2\pi} d\sigma_1 \int_0^{2\pi} d\sigma_2 \int_0^{2\pi} d\sigma_3 \\ &\langle C | \left( \frac{1}{2} \psi_0^\mu \psi_0^\nu \right) \left( \frac{1}{2} \psi_0^\alpha \psi_0^\beta \right) \left( \frac{1}{2} \psi_0^\kappa \psi_0^\tau \right) \times \\ &\frac{1}{(C + A)!} \left( \tilde{X}^{\lambda_1} \dots \tilde{X}^{\lambda_{C+A}} \right) (\sigma_1) \frac{1}{(A + B)!} \left( \tilde{X}^{\rho_1} \dots \tilde{X}^{\rho_{A+B}} \right) (\sigma_2) \frac{1}{(B + C)!} \left( \tilde{X}^{\phi_1} \dots \tilde{X}^{\phi_{B+C}} \right) (\sigma_3) \times \\ &\partial_{\lambda_1} \dots \partial_{\lambda_{(C+A)}} F_{\mu\nu}(x) \partial_{\rho_1} \dots \partial_{\rho_{(A+B)}} F_{\alpha\beta}(x) \partial_{\phi_1} \dots \partial_{\phi_{(B+C)}} F_{\kappa\tau}(x) |B\rangle_R . \end{aligned}$$

Aux ordres supérieurs, il nous faut considérer tous les triangles de nuages tels que celui que nous venons d'examiner. À l'ordre  $K$  dans les champs de jauge, pour les corrections au couplage<sup>1</sup>  $C^{(10-2K)} \wedge F^K$ , nous avons  $K$  nuages de points numérotés de 1 à  $K$ . Il y a  $P_K := K!/(2!(K-2)!)$  propagateurs de types différents  $D^{\mu\nu}(\sigma_{ij})$  selon le choix des indices  $i$  et  $j$  entre 1 et  $K$ . Ces types sont numérotés de 1 à  $P_K$ , et nous disons qu'il y a  $N_i$  propagateurs du type numéro  $i$ , notés  $H_i$ , dans une contraction. L'expression du couplage est réorganisée par un facteur de symétrie constitué de factorielles de nombres de propagateurs, au dénominateur, donnant

$$\frac{1}{K!} \sum_{N_1 \geq 0} \sum_{N_2 \geq 0} \cdots \sum_{N_{P_K} \geq 0} \left( \prod_{i=1}^{P_K} \frac{1}{N_i!} \right) \left( \prod_{i=1}^{P_K} (H_i)^{N_i} \right) \times \\ C \wedge (\partial \dots \partial F)^K.$$

Les dérivées apparaissent avec les indices correspondant aux propagateurs, de façon automatique, ce qui nous dispense d'écrire ces indices.

Pour passer de l'ordre  $K$  à l'ordre  $K+1$ , il faut ajouter un nuage de points et compter les nouveaux graphes permis. Ils contiennent comme sous-graphes des graphes qui étaient permis à l'ordre  $K$ . Dans chacun de ces sous-graphes, appelons  $S_i$  le nombre de liens connectés au sommet numéro  $i$ , pour  $1 \leq i \leq K$ . Le sommet numéro  $i$  est connecté par  $N_{K+1}$  propagateurs au nouveau sommet (numéro  $K+1$ ), et par  $S_i$  propagateurs à des sommets  $i$  du sous-graphe ( $S_i$  est le nombre de points du nuage au sommet  $i$  reliés à d'autres points du sous-graphe). Disons qu'il y a  $P$  types de propagateurs (numérotés) dans le sous-graphe, et pour tout entier  $J \leq P$ , appelons  $N_J$  le nombre de propagateur du type  $J$ . Le facteur de symétrie d'un graphe à  $K+1$  sommets est le produit du facteur de symétrie du sous-graphe par le nombre de façons de relier le sommet numéro  $K+1$  au sous-graphe. D'après l'hypothèse de récurrence au rang  $K$ , nous pouvons écrire

$$\sum_{N_1} \cdots \sum_{N_{P+K}} \left( \left( \prod_{j=1}^K \frac{1}{(S_j + N_{P+j})!} \right) \times \frac{1}{(N_{P+1} + \cdots + N_{P+K})!} \right) \times \\ \left( C_{N_{P+1} + \cdots + N_{P+K}}^{N_{P+1}} C_{N_{P+2} + \cdots + N_{P+K}}^{N_{P+2}} \cdots C_{N_{P+K-1} + N_{P+K}}^{N_{P+K-1}} \right) \times \prod_{j=1}^K \frac{(S_j + N_{P+j})!}{S_j!} \times \\ \left( \frac{\prod_{j=1}^K S_j!}{\prod_{I=1}^P N_I!} \right).$$

Le premier facteur provient du développement de l'exponentielle. Le deuxième est le nombre de choix d'un point du nuage du sommet  $K+1$ , et de contractions associées. Le facteur  $\prod_{j=1}^K S_j!$  était compensé au rang  $K$  à cause du développement de l'exponentielle, mais doit être pris en compte ici.

$$\frac{1}{(N_{P+1} + \cdots + N_{P+K})!} C_{N_{P+1} + \cdots + N_{P+K}}^{N_{P+1}} C_{N_{P+2} + \cdots + N_{P+K}}^{N_{P+2}} \cdots C_{N_{P+K-1} + N_{P+K}}^{N_{P+K-1}} \frac{1}{\prod_{i=1}^P N_i!} = \\ \frac{1}{\prod_{i=1}^P N_i!} \frac{(N_{P+K} + N_{P+K-1})!}{N_{P+K}! N_{P+K-1}!} \frac{(N_{P+K} + N_{P+K-1} + N_{P+K-2})!}{(N_{P+K} + N_{P+K-1})! N_{P+K-2}!} \times$$

<sup>1</sup>Remarquons que la récurrence fonctionne même pour  $K$  supérieur à 5, sans forme de Ramond-Ramond correspondante. Ce fait sera utilisé au prochain chapitre.

$$\begin{aligned} & \dots \frac{(N_{p+K} + N_{p+K-1} + \dots + N_{p+1})!}{\dots N_{p+1}!} \times \\ & \frac{1}{(N_{p+1} + \dots + N_{p+K})!} = \\ & \frac{1}{\prod_{i=1}^{P_K+K} N_i!} \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration, puisque  $P_{K+1} = P_K + K$ .

## 4.5 Au-delà de la limite de Seiberg–Witten

### Contribution du terme symétrique

La limite de Seiberg–Witten, dans laquelle nous avons travaillé jusqu’à présent, ne laisse subsister que les corrections dérivatives qui accompagnent chaque paire de dérivées par un tenseur  $\theta$ . Or le paramètre  $\alpha'$ , qui tend vers 0 dans la limite de Seiberg–Witten, a la même dimension que l’échelle de non-commutativité  $\theta$ . Toute une classe de corrections a donc été effacée par la considération de la limite de Seiberg–Witten. L’origine des ces corrections sous-dominantes est claire au vu du propagateur des champs scalaires : c’est le terme symétrique, avec la métrique de corde ouverte, qui contient le facteur  $\alpha'$ . Or, du point de vue de la théorie des champs non-commutatifs, il est important de n’avoir qu’un terme antisymétrique puisque c’est ce terme qui donne lieu au commutateur des coordonnées et mesure la non-commutativité ; l’interprétation du terme symétrique du propagateur, et des corrections sous-dominantes induites, n’est donc pas fournie par un argument de théorie quantique des champs tel que celui donné dans [SW99]. Les corrections dérivatives ne seront donc pas calculées par la vertu d’une symétrie de dualité. Notre approche directe en théorie *commutative* des cordes, pour lourde qu’elle soit, constitue un recours naturel. Il s’avère, en y regardant de plus près, que nous avons fait l’essentiel du travail nécessaire dans l’évaluation par récurrence des facteurs de symétrie. Si nous utilisons le même propagateur régularisé, nous aurons encore usage des résultats de cette récurrence.

Nous nous intéressons donc au propagateur

$$\langle X^\mu(\sigma_1) X^\nu(\sigma_2) \rangle =: D^{\mu\nu}(\sigma) = \theta^{\mu\nu} \log \left( \frac{1 - e^{-\epsilon + i\sigma}}{1 - e^{-\epsilon - i\sigma}} \right) + \alpha' G^{ab} \log |1 - e^{-\epsilon + i\sigma}|^2,$$

dont l’invariance par translation a été prise en compte en définissant

$$\sigma := \sigma_1 - \sigma_2.$$

Pour la partie régulière du couplage à  $C^{(6)}$ , nous pouvons écrire le terme d’ordre  $2n$  en dérivées, en faisant entrer tous les opérateurs de dérivées dans un seul opérateur différentiel agissant sur le produit  $F \wedge F$  :

$$\frac{\alpha'^n}{n!} \int_0^{2\pi} d\sigma \left( \frac{\theta^{\mu\nu}}{2\pi\alpha'} \log \left( \frac{1 - e^{-\epsilon + i\sigma}}{1 - e^{-\epsilon - i\sigma}} \right) + G^{\mu\nu} \partial_\mu \partial'_\nu \log |1 - e^{-\epsilon + i\sigma}|^2 \right)^n F(x) \wedge F(x')|_{x'=x}.$$



Nous avons à effectuer la somme sur l'ordre  $n$ , que nous faisons passer dans l'intégrand, et qui donne l'exponentielle d'un opérateur différentiel :

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha'^n}{n!} d\sigma \left( \frac{\theta^{\mu\nu}}{2\pi\alpha'} \log \left( \frac{1 - e^{-\epsilon+i\sigma}}{1 - e^{-\epsilon-i\sigma}} \right) + G^{\mu\nu} \partial_\mu \partial'_\nu \log |1 - e^{-\epsilon+i\sigma}|^2 \right)^n \\ &= \int_0^1 d\tau |2 \sin(\pi\tau)|^{2t} \exp((ia\pi)(2\tau - 1)). \end{aligned}$$

Cet opérateur est donc construit à partir de deux opérateurs différentiels d'ordre 2, en provenance directe des parties antisymétrique et symétrique du propagateur. La partie symétrique restitue les dimensions anormales qui avaient été évitées par la considération de la limite d'échelle :

$$\begin{aligned} a &:= \partial_\mu \theta^{\mu\nu} \partial_\nu, \\ t &:= \alpha' \partial_\mu G^{\mu\nu} \partial_\nu. \end{aligned}$$

L'opérateur codant les corrections dérivatives au couplage  $F \wedge F$ , noté  $\tilde{*}_2$  possède la bonne limite  $*_2$  parce que les paramètres de cordes ouvertes restent fixés quand  $\alpha'$  tend vers 0. L'opérateur  $t$  disparaît donc simplement, et la forme précédemment identifiée pour  $*_2$  est récupérée grâce à une identité de fonctions Gamma :

$$\begin{aligned} \tilde{*}_2 &:= \int_0^1 d\tau |2 \sin(\pi\tau)|^{2t} \exp((ia\pi)(2\tau - 1)) = \frac{\Gamma(1 + 2t)}{\Gamma(1 - a + t)\Gamma(1 - a + t)}. \\ \lim_{\alpha' \rightarrow 0} (\tilde{*}_2) &= \frac{1}{\Gamma(1 - a)\Gamma(1 + a)} = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi}. \end{aligned}$$

De plus, ce résultat reproduit l'amplitude de diffusion évaluée par Liu et Michelson dans [LM01]. Seul l'accord au premier ordre en  $G$  avait été vérifié par Mukhi et Suryanarayana dans [MS02], qui n'avaient pas déduit l'expression entière de  $\tilde{*}_2$  par la méthode de la fonction de partition, mais avaient postulé l'existence d'un tel opérateur compatible avec les résultats des amplitudes de diffusion. Les conséquences sur la description non-commutative qu'ils ont tirées de ce raisonnement sont correctes, et je peux préciser leurs attentes sur l'invariance de jauge non-commutative, grâce aux corrections aux plus grands ordres en  $F$ , que j'ai également étudiés. C'est ici que le raisonnement par récurrence exposé plus haut intervient, pour donner les opérateurs différentiels suivants :

$$\begin{aligned} \tilde{*}_3 &= \sum_{A,B,C \geq 0} \frac{1}{A!} \frac{1}{B!} \frac{1}{C!} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma_3}{2\pi} Q_{12}^A Q_{23}^B Q_{31}^C \\ &= \int_0^1 d\tau_1 \int_0^1 d\tau_2 \int_0^1 d\tau_3 \exp \{ ia_{12} \pi (2\tau_{12} - \epsilon(\tau_{12})) + 2t_{12} \log |2 \sin(\pi\tau_{12})| \\ &\quad + ia_{23} \pi (2\tau_{23} - \epsilon(\tau_{23})) + 2t_{23} \log |2 \sin(\pi\tau_{23})| \\ &\quad + ia_{31} \pi (2\tau_{31} - \epsilon(\tau_{31})) + 2t_{31} \log |2 \sin(\pi\tau_{31})| \}, \end{aligned}$$

et plus généralement

$$\tilde{*}_p = \int_0^1 d\tau_1 \dots \int_0^1 d\tau_p \prod_{1 \leq i < j \leq p} \exp \{ i\pi a_{ij} (2\tau_{ij} - \epsilon(\tau_{ij})) \}.$$

## Interprétation non-commutative

Au cours de ce chapitre, nous avons décrit des situations correspondant à trois cases du tableau suivant, correspondant aux références indiquées :

	description commutative	description non-commutative
limite de Seiberg–Witten	[FT85, AT88]	[Liu01, MS01]
au-delà	[MS02, Gra04c]	?

TAB. 4.1 – Versatilité et limite de Seiberg–Witten

Il nous manque encore une interprétation commutative de la déformation des produits  $*_n$  au-delà de la limite de Seiberg–Witten. Il est tentant de penser, comme dans [MS02], que la théorie de jauge non-commutative reste un outil valide<sup>2</sup>. L’argument topologique d’invariance des orbites de jauge vis-à-vis du choix de description reste valide, et nous héritons d’une déformation de l’application de Seiberg–Witten (couplage à  $C^{(8)}$ ), après avoir calculé des corrections dérivatives (couplage à  $C^{(6)}$ ). Nous parcourons en quelque sorte en sens inverse le chemin qui avait été suivi pour extraire les prédictions non-commutatives dans la limite de Seiberg–Witten.

J’ai confirmé dans [Gra04c] cette déformation de la théorie de jauge non-commutative anticipée dans [MS02] à partir de l’expression de  $\hat{*}_2$ . Les calculs de produits déformés au-delà de la limite de Seiberg–Witten nous invitent à redéfinir le tenseur du champ de jauge, ainsi que les transformations de jauge, afin de les rendre cohérentes avec une prescription d’intégration le long d’une ligne de Wilson déformée. Les expressions naturelles sont

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_{\hat{*}},$$

$$\delta \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\lambda} - i[\hat{A}_\mu, \hat{\lambda}]_{\hat{*}},$$

où  $\hat{*}$  est le star-produit déformé, à l’aide duquel une ligne de Wilson peut être écrite, de manière à donner les opérateurs déformés  $\hat{*}_p$  dans un développement en puissances du champ de jauge. Conformément aux conjectures de [MS02], ces expressions assurent que la relation de récurrence entre les différents opérateurs différentiels est équivalente à l’invariance de jauge. Nous nous souvenons en effet que la relation de récurrence écrite dans [Liu01] entre les  $*_n$  d’ordres  $n$  distincts était dans la limite de Seiberg–Witten équivalente à la symétrie de jauge. Nous allons redéfinir les opérateurs modifiés à partir d’observables se transformant suivant la loi

$$O_i \mapsto -i[O_i, \hat{\lambda}]_{\hat{*}},$$

et intervenant dans les couplages de Ramond–Ramond.

Écrivons les couplages de Ramond–Ramond pour un mode de Fourier  $k$ . Leur forme implique des insertions d’objets  $O_i$  du type  $(\theta - \theta \hat{F})^{\mu\nu}$  se transformant par symétrie de jauge suivant la loi

$$O_i \mapsto -i[O_i, \hat{\lambda}]_{\hat{*}},$$

<sup>2</sup>C’est en particulier encourageant pour les développements moins formels dans lesquels l’échelle de non-commutativité n’est plus invariante par translation.

ce qui invite à reproduire avec nos produits déformés le raisonnement de [Liu01] vérifiant l'invariance de jauge à partir de l'expression des opérateurs  $*_n$  :

$$Q(k) = \sum_{m \geq 0} Q_m(k),$$

$$Q_m(k) = \frac{1}{m!} (\theta \partial)^{\mu_1} \dots (\theta \partial)^{\mu_m} \langle O_1, \dots, O_p, \hat{A}_{\mu_1}, \dots, \hat{A}_{\mu_m} \rangle_{\tilde{*}_{p+m}}.$$

Une transformation de jauge agit en effet sur les termes de cette dernière expression suivant la loi

$$\begin{aligned} \delta Q_m &= -\frac{i}{m!} (\theta \partial)^{\mu_1} \dots (\theta \partial)^{\mu_m} \sum_{i=1}^p \langle O_1, \dots, [\hat{\lambda}, O_i]_{\tilde{*}}, \dots, O_p, \hat{A}_{\mu_1}, \dots, \hat{A}_{\mu_m} \rangle_{\tilde{*}_{p+m}} \\ &\quad - \frac{i}{m!} (\theta \partial)^{\mu_1} \dots (\theta \partial)^{\mu_m} \sum_{i=1}^m \langle O_1, \dots, O_p, \hat{A}_{\mu_1}, \dots, [\hat{\lambda}, \hat{A}_{\mu_i}]_{\tilde{*}}, \dots, \hat{A}_{\mu_m} \rangle_{\tilde{*}_{p+m}} \\ &\quad + \frac{1}{(m-1)!} (\theta \partial)^{\mu_1} \dots (\theta \partial)^{\mu_m} \langle O_1, \dots, O_p, \hat{A}_{\mu_1}, \dots, \hat{A}_{\mu_{m-1}}, \partial_{\mu_m} \hat{\lambda} \rangle_{\tilde{*}_{p+m}}, \end{aligned}$$

de sorte que la variation des courbures de jauge dans  $Q_m$  est compensée par la variation du potentiel dans  $Q_{m+1}$ , selon le schéma connu de [Liu01]. Nous avons montré la cohérence interne entre la déformation de la prescription  $L_*$ , celle de la courbure de jauge et celle des transformations de jauge. Le chapitre suivant aborde la question naturelle du couplage au champ de tachyon, pour lequel les résultats du présent chapitre facilitent le calcul des intégrales de chemin.

## Chapitre 5

# Tachyons, actions effectives et transitions de phase

*Dans ce chapitre, nous considérons l'action effective pour le champ de tachyon des cordes ouvertes. Nous retrouvons les produits déformés rencontrés dans le secteur de jauge. Ils sont compatibles avec l'universalité du potentiel des tachyons. Le couplage des tachyons au champ de jauge, avec les corrections dérivatives que nous calculons, nous invite à rapprocher les résultats de ce chapitre et ceux du précédent par l'intermédiaire des superconnexions.*

### 5.1 Motivation

#### Condensation de tachyons

Sen a conjecturé l'existence d'une transition de phase entre un vide instable présentant cordes ouvertes, D-branes et scalaire tachyonique, et un vide stable de cordes fermées. Nous avons mentionné plus haut l'annihilation de D-branes, afin de motiver l'introduction de la K-théorie pour décrire les charges de Ramond–Ramond. Nous sommes également habitués à considérer une D-brane comme un état lié de D-branes de dimension plus petite. Les solitons tachyoniques sur le volume d'univers font également l'objet d'une conjecture, qui les assimile à des D-branes de dimension plus petite.

Ces conjectures donnent lieu à une intense activité en théorie des cordes, et ont pour enjeu rien de moins que la formulation non-perturbative de la théorie des cordes, qui fait l'objet de la seconde quantification ou *théorie des champs de cordes*. Une notion de non-commutativité a été associée à la théorie des champs de cordes par Witten en 1986 dans l'article fondateur [Wit86]. Elle tient aux deux ordres cycliques distincts qui peuvent être assignés aux trois cordes ouvertes se rencontrant en un vertex.

#### Tachyons et bords

Nous avons utilisé l'invariance de jauge au chapitre précédent comme guide dans l'écriture des couplages de Ramond–Ramond dans la description non-commutative. Le problème de la transformation de Seiberg–Witten est issu du caractère topologique des orbites de jauge. Or le spectre des cordes ouvertes contient un scalaire, le tachyon  $T$ , dont la dynamique tient à la structure non-perturbative de la théorie des cordes, problème universel qui fait l'objet de

la conjecture de Sen [Sen99b].

L'objet de ce chapitre est d'abord l'extension des techniques précédentes au secteur tachyonique, ce qui impose de considérer l'intégrale de chemin

$$Z[T] = \int DX e^{-S_\Sigma - \int_{\partial\Sigma} T(X(\tau))},$$

avec le même fond de cordes fermées que précédemment, et en particulier avec un champ antisymétrique constant. Nous retrouverons les star-produits et leur déformation par la métrique, déformation qui pourra être entièrement contenue dans une modification de la loi de produit, sans remettre en cause la structure de l'action effective. Formellement, le caractère scalaire du champ de tachyons, par opposition au caractère gradué des champs de jauge, autorise des puissances arbitrairement élevées du champ à contribuer à l'action effective. Les élégantes structures identifiées lors du calcul des corrections dérivatives dans le secteur de jauge, donnent lieu à une extrapolation à des degrés arbitrairement élevés, qui ont inspiré à Wylard [Wyl01] une identité de fonctions Gamma d'Euler, qui apparaît dans le contexte de l'évaluation des potentiels effectifs de tachyons. Mes calculs montrent qu'il ne s'agit pas d'un accident, et que le potentiel quadratique (exactement soluble) :

$$T(X) = a + u_{\mu\nu} X^\mu X^\nu,$$

où  $a$  et  $u_{\mu\nu}$  sont un scalaire et un tenseur symétrique constants, correspond à l'identité suggérée par Wylard.

## 5.2 Non-commutativité et condensation de tachyons

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été motivés par des articles de Cornalba [Cor01] et Okuyama [Oku01]. L'article [Cor01] teste la conjecture de Sen sur des calculs de tension de produits de désintégration dans la limite de Seiberg–Witten, et nous présenterons une conjecture de Sen à l'aide de cet exemple. L'article [Oku01] calcule le potentiel de tachyons, et il est naturel après les calculs du secteur de jauge, de se demander comment les produits modifiés peuvent s'insérer dans ce résultat.

La conjecture de Sen est d'essence non-perturbative, puisqu'elle relie différents points critiques de la théorie des champs de cordes. La valeur du potentiel de tachyons doit refléter les tensions des D-branes de différentes dimensions impliquées dans la condensation de tachyons. La méthode de Cornalba repose sur la fonction  $\beta$  des couplages insérés sur le bord de la surface d'univers, à l'ordre du disque. Shatashvili a argumenté [Sha94] en faveur d'une expression de l'action effective pour les cordes ouvertes tenant compte de la renormalisation des couplages sur le bord. Pour une intégrale de chemin de la forme

$$Z = \int DX e^{-\int_\Sigma (dX \wedge *dX + B) - \int_{\partial\Sigma} d\tau T[X(\tau)]},$$

la valeur du champ de tachyon en chaque point du bord est un couplage, et l'action effective s'écrit

$$S[T] = \left( 1 - \int dx \beta[T(x)] \frac{\delta}{\delta T(x)} \right) Z[T].$$

Dans la limite d'un fort champ antisymétrique, les dimensions anormales disparaissent, comme dans le développement en produit d'opérateurs de deux ondes planes que nous avons écrit au moment de la discussion de la limite de Seiberg–Witten. La fonction  $\beta$  du champ de tachyon est donc simplement linéaire dans le champ :

$$\beta[T(x)] = -T(x).$$

Ainsi l'action effective s'écrit, en fonction de l'opération de trace sur l'espace de Hilbert évoquée au chapitre précédent :

$$a := \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(x^1 + ix^2), \quad a^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(x^1 - ix^2),$$

$$S[T] = 2\pi T_{25} \text{Tr}[(1 + T)e^{-T}].$$

Pour la donnée du champ antisymétrique  $B$ , un seul bloc de taille deux d'une matrice antisymétrique est considéré, et les configurations de tachyon insérées sur le bord ne dépendent que des coordonnées <sup>1</sup> associées aux directions 1 et 2. On s'attend donc à obtenir une D23-brane comme produit de la condensation de tachyons. Le problème est donc réduit à montrer que le minimum de  $S$  coïncide avec la tension d'une D23-brane. Pour le modèle exactement soluble

$$T(x) := a + uB \left( (x^1)^2 + (x^2)^2 \right),$$

que nous reprendrons plus loin, la trace peut être évaluée,

$$S = \left( 1 - a \frac{\partial}{\partial a} - u \frac{\partial}{\partial a} \right) \left( 2\pi T_{25} \text{Tr}(e^{-a - u(2a^\dagger a + 1)}) \right),$$

par une somme de série géométrique. Un point stationnaire  $a^*(u)$  par rapport au terme constant  $a$  peut ensuite être écrit en fonction de  $u$ . La limite de la valeur

$$S(a^*(u), u) = 2\pi T_{25} \frac{1}{1 - e^{-2u}} \exp \left( \frac{2u}{e^{2u} - 1} \right)$$

lorsque  $u$  tend vers l'infini, est bien  $T_{23}$ , ce qui confirme sur un fond de tenseur antisymétrique, et par des méthodes de théorie non-commutative, un résultat de [KMM00b].

## 5.3 Un *toy model* : les cordes $p$ -adiques

### Cordes $p$ -adiques

Décrivons tout d'abord la théorie des cordes  $p$ -adiques, et expliquons en quoi elle constitue un *toy model* de la théorie des cordes. Pour une introduction plus complète, le rapport de Brekke et Freund [BF93] fait autorité. Soit un nombre premier  $p$ . On lui associe le corps des nombres  $p$ -adiques  $\mathbf{Q}_p$  en complétant le corps des nombres rationnels pour la norme  $p$ -adique, définie par  $|x|_p = p^{-n}$ , où  $p^n$  est la plus grande puissance de  $p$  divisant le nombre  $x$ .

---

<sup>1</sup>Dans toutes les actions effectives, nous avons omis un facteur égal au volume de l'espace transverse aux directions 1 et 2.

L'utilisation d'un corps de nombres non-archimédien n'est pas qu'une fantaisie : elle s'avère féconde pour au moins deux raisons. D'abord, il existe remarquablement peu de façons de faire entrer les nombres  $p$ -adiques dans la théorie des cordes bosoniques. De plus, cette introduction aboutit à une solution exacte, le calcul de la fonction de partition des tachyons de la corde  $p$ -adique. Concernant la multiplicité des modèles  $p$ -adiques, on peut imaginer un choix entre les nombres complexes et les nombres  $p$ -adiques pour les coordonnées de la surface d'univers, les coordonnées de l'espace-temps, l'action de la surface d'univers et les amplitudes de diffusion, soit un surplus de quinze nouvelles théories pour toute théorie des cordes. Ce serait un véritable boîte de Pandore. Or il s'avère que le seul endroit dans lequel les nombres  $p$ -adiques peuvent venir prendre la place des nombres complexes de manière cohérente<sup>2</sup>, est le bord de la surface d'univers. Il n'y a donc qu'un seul modèle  $p$ -adique possible, et il est tout à fait adapté à notre problème concernant l'action effective des champs scalaires sur les D-branes, puisque la corde  $p$ -adique possède un scalaire dans son spectre, et des bords sur sa surface d'univers.

Jusqu'à quel point les résultats habituels peuvent-ils être réécrits via de simples changements de notations ? Les notions de mesure, intégration, changements de variables, transformation de Fourier, trouvent des analogues sur le corps des nombres  $p$ -adiques, cependant la notion de dérivée ne se généralise pas, à cause de l'absence d'ordre total qui interdit de comparer les valeurs d'une fonction "à deux instants  $p$ -adiques successifs", à moins de considérer un modèle discret de l'espace sur lequel nous travaillons. C'est ce qu'a fait Zabrodin [Zab89], en réalisant la surface d'univers à l'ordre du disque, munie d'un bord  $p$ -adique, comme un arbre infini, dans lequel chaque noeud réunit  $p + 1$  branches. Le bord de la surface d'univers n'est autre que l'ensemble (projectif) des feuilles de cet arbre, le développement  $p$ -adique de chaque feuille étant dicté algorithmiquement par le chemin qui la relie à la racine de l'arbre. Les reparamétrages de la surface d'univers engendrent dans cette description des changements de racine pour l'arbre, et des changements de coordonnées  $p$ -adiques sur le bord. Un tel arbre est connu sous le nom d'arbre de Bruhat-Tits.

L'action de la corde bosonique comportant des dérivées, elle doit être traduite dans le langage discret adapté à la structure d'arbre. Avec une numérotation des sommets et la notation  $j(i)$  désignant un sommet numéro  $j$  voisin du sommet numéro  $i$ , nous écrivons sans surprise

$$\int_{\Sigma} d^2\sigma \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial^{\alpha} X_{\mu} \rightarrow \sum_i \sum_{j(i)} (X^{\mu}(j(i)) - X^{\mu}(i))(X_{\mu}(j(i)) - X_{\mu}(i)) .$$

L'intégrale de chemin par rapport aux degrés de liberté portés par l'intérieur du disque peut être effectuée, ce qui fournit une action non-locale sur le bord  $p$ -adique. Les amplitudes de diffusion de tachyons s'obtiennent soit en calculant des intégrales de chemin avec des conditions de bord de Neumann et l'action discrète bidimensionnelle ci-dessus, soit par une méthode du col à partir de l'action non-locale sur le bord. Les deux méthodes [FO88, FO87, BFW88] donnent au tachyon  $\phi$  une dynamique dictée par le lagrangien effectif suivant :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi p^{-\frac{1}{2}\square}\phi + \frac{1}{p+1}\phi^{p+1}.$$

---

<sup>2</sup>c'est-à-dire donnant des amplitudes méromorphes, invariantes de Moebius.

## Coupler les cordes $p$ -adiques à un fond de tenseur antisymétrique

L'action de la surface d'univers qui conduit au lagrangien effectif exact exposé plus haut ne comprend qu'un terme, couplant les coordonnées discrètes sur l'arbre au tenseur symétrique qu'est la métrique de l'espace-temps. La question de l'inclusion du champ de fond antisymétrique est naturelle ; se fondant sur l'expérience acquise dans l'étude des solitons non-commutatifs dans le cadre archimédien, Ghoshal a conjecturé [Gho04] que l'influence d'un fond de tenseur antisymétrique constant était convenablement décrite par une déformation du produit des champs, sur le modèle du produit de Moyal longuement étudié plus haut :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi * p^{-\frac{1}{2}\square}\phi + \frac{1}{p+1}(*\phi)^{p+1}.$$

Si cette action est un honnête point de départ pour l'étude d'une classe de solitons  $p$ -adiques non-commutatifs en théorie des champs, il n'est pas certain *a priori* qu'elle provienne de la théorie des cordes  $p$ -adiques via une action de surface d'univers complétant le couplage de la métrique à l'arbre de Bruhat–Tits. J'ai proposé dans [Gra04b] une telle action de surface d'univers, et obtenu le star-produit attendu, en adaptant la démarche de Seiberg et Witten à un bord dépourvu de relation d'ordre.

Il est naturel de se demander comment coupler le champ antisymétrique au bord, car on peut interpréter ce champ comme un champ magnétique de fond, ce qui est indifférent au niveau de la théorie des cordes. Notre démarche sera donc à rapprocher de l'action non-locale obtenue en intégrant les degrés de liberté liés aux sommets intérieurs de l'arbre. Les ingrédients spécifiques de la corde  $p$ -adique sont les extensions quadratiques qui se subsituent au demi-plan complexe supérieur habituel, avec certaines de leurs fonctions spéciales.

Comme nous l'avons signalé plus haut, en l'absence d'une composante antisymétrique dans les champs de fond, les amplitudes de diffusion à  $N$  particules, notées  $A_N$ , induites par le schéma discret du laplacien sur l'arbre de Bruhat–Tits,

$$A_N(k_1, \dots, k_N) = \int DX \exp(-S[X] + i \sum_{i=1}^N k_{i,\mu} X^\mu(u_i)) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} |u_i - u_j|_p^{k_{i,\mu} g^{\mu\nu} k_{j,\nu}},$$

sont reproduites pour tout  $N$  par une action non-locale unidimensionnelle sur le bord  $p$ -adique. Cette action a été écrite par Zhang [Zha88] :

$$S_{\text{sym}}[X] = \int_{\mathbf{Q}_p} du (g_{\mu\nu} X^\mu(-u) |u|_p X^\nu(u)).$$

La structure de cette action, à une transformation de Fourier près, nous rappelle fortement l'intégrale obtenue plus haut par le théorème de Stokes dans le cas archimédien en couplant le tenseur antisymétrique. C'est un signe encourageant, qui nous fait penser qu'il doit bien exister une antisymétrisation de l'action de Zhang possédant encore certaines des propriétés du terme archimédien à l'origine du produit de Moyal. Cependant, pour des raisons d'antisymétrie précisément, une antisymétrisation minimale donne un résultat identiquement nul d'après les règles de changement de variables dans l'intégrale sur les nombres  $p$ -adiques :

$$\int_{\mathbf{Q}_p} du B_{\mu\nu} X^\mu(-u) |u|_p X^\nu(u) = 0.$$



C'est ennuyeux, mais il semble que la recette consistant à définir l'analogue de la dérivée par des polynômes dans l'espace de Fourier, pour intégrer ensuite et trouver une action valide d'après le théorème de Plancherel, échoue pour une structure d'indices antisymétrisée une seule fois, comme si l'absence d'ordre sur le bord conspirait pour effectuer une sorte d'opération de moyenne interdisant le couplage à  $B_{\mu\nu}$ . Il faut donc jouer une seconde fois, ce qui est possible. En effet, nous pouvons antisymétriser en les points d'insertion des tachyons sur le bord. Autrement dit, c'est d'une fonction signe que nous avons besoin. Une telle fonction existe dans le contexte  $p$ -adique, mais par sur le corps de scalaires  $p$ -adiques lui-même (qui n'est pas ordonné). Elle existe sur une extension quadratique de  $\mathbf{Q}_p$ , ce qui nous rappelle le caractère bidimensionnel de la surface d'univers. Le disque archimédien est en effet conformément équivalent au demi-plan complexe, extension quadratique de la droite réelle qu'est le bord.

Considérons une extension quadratique du corps des nombres  $p$ -adiques correspondant à un nombre  $\tau$  non carré. La fonction signe  $\epsilon_\tau$  correspondante est définie sur l'extension  $\mathbf{Q}_p$  comme suit (définitions et propriétés des fonctions signe sont prises dans le cours d'arithmétique de Serre [Ser70]), à l'aide de la notion de conjugaison dans l'extension quadratique : elle prend la valeur  $+1$  sur les nombres qui peuvent s'écrire comme le produit de deux nombres conjugués dans  $\mathbf{Q}_p(\sqrt{\tau})$ , et la valeur  $-1$  partout ailleurs. Elle a les propriétés multiplicatives habituelles. La propriété qu'il nous faut pour restaurer l'alternance de signe attachée à la relation d'ordre s'écrit

$$\epsilon_\tau(x - y) = -\epsilon_\tau(y - x),$$

c'est-à-dire que le signe attribué au nombre  $-1$  dans  $\mathbf{Q}_p(\sqrt{\tau})$  doit être négatif. Or ce n'est pas le cas pour toutes les extensions du corps des nombres  $p$ -adiques. Nous ferons dorénavant l'hypothèse que l'extension est choisie de manière à vérifier cette propriété, et nous supprimons l'indice  $\tau$ . Le caractère *ad hoc* de ce choix devrait être éclairci par une prescription bidimensionnelle pour le couplage au champ de fond antisymétrique. Une telle prescription serait l'analogue du travail de Zabrodin sur l'arbre de Bruhat–Tits, alors que nous n'abordons que le travail de Zhang sur les couplages aux feuilles. Toujours est-il que la seule propriété du paramètre  $\tau$  que nous utilisons est

$$\epsilon_\tau(-1) = -1.$$

L'action unidimensionnelle sur le bord  $p$ -adique est finalement

$$S[X] := \int_{\mathbf{Q}_p} du \left( g_{\mu\nu} X^\mu(-u) |u|_p X^\nu(u) + B_{\mu\nu} X^\mu(-u) |u|_p \epsilon_\tau(u) X^\nu(u) \right).$$

Cette proposition a également été émise également par Ghoshal et Kawano[GK05], qui ont développé davantage les questions de symétrie.

Notre prescription suffit à calculer les modifications induites par le terme antisymétrique sur les amplitudes  $A_N$ . Nous introduisons les notations habituelles  $G$  et  $\Theta$  pour les parties symétrique et antisymétrique de l'inverse de  $\delta + B$  :

$$G^{\mu\nu} := \left( \frac{1}{\delta + B} \right)^{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} \left( \frac{1}{\delta - B} \right)^{\beta\nu},$$

$$\Theta^{\mu\nu} := - \left( \frac{1}{\delta + B} \right)^{\mu\alpha} B_{\alpha\beta} \left( \frac{1}{\delta - B} \right)^{\beta\nu}.$$

Le propagateur est régularisé comme dans [Zha88] par un paramètre  $s$ . Par bonheur nous avons un arsenal de fonctions Gamma  $p$ -adiques modifiées  $\hat{\Gamma}_p$  incluant notre fonction signe :

$$\Delta_{reg}^{\mu\nu}(x-y) := \int_{\mathbf{Q}_p} du e^{i(x-y)u} \left( G^{\mu\nu} \frac{1}{|u|^{1+s}} + \Theta^{\mu\nu} \frac{\epsilon(u)}{|u|^{1+s}} \right).$$

$$\hat{\Gamma}_p(s) := \int_{\mathbf{Q}_p} du e^{i2\pi[u]} \epsilon_\tau(u) |u|^{s-1}.$$

$$\Delta_{reg}^{\mu\nu}(x-y) = |x-y|^{-s} \left( G^{\mu\nu} \Gamma_p(s) + \Theta^{\mu\nu} \epsilon(x-y) \hat{\Gamma}_p(s) \right).$$

La partie finie dans un développement près de  $s = 0$  est extraite via la formule

$$\hat{\Gamma}_p(s) = \sqrt{\epsilon_\tau(-1)} p^{s-1/2}.$$

Le propagateur que nous utiliserons pour l'évaluation des amplitudes dans une approximation de col s'écrit enfin

$$\Delta^{\mu\nu}(x-y) = G^{\mu\nu} \log |x-y| + \frac{i}{\sqrt{p}} \Theta^{\mu\nu} \epsilon_\tau(x-y).$$

Les techniques habituelles donnent lieu aux phases qui sont la signature dans l'espace de Fourier des produits de Moyal :

$$A_N(k_1, \dots, k_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} e^{\frac{i}{2\sqrt{p}} k_{i,\mu} \Theta^{\mu\nu} k_{j,\nu} \epsilon(u_i - u_j)} |u_i - u_j|^{k_{i,\mu} G^{\mu\nu} k_{j,\nu}}.$$

Ceci légitime l'étude des solitons  $p$ -adiques non-commutatifs par optimisation de l'action effective écrite avec le produit

$$* := \exp \left( \frac{i}{2\sqrt{p}} \partial'_\mu \Theta^{\mu\nu} \partial_\nu \right) |_{x'=x}.$$

## 5.4 Dictionnaire pour l'évaluation de l'action effective pour les scalaires

En lieu et place de l'intégrale de chemin correspondant au secteur de jauge, considérons l'intégrale de chemin correspondant à l'action effective du champ de tachyons. Le nouveau terme d'action de la surface d'univers n'est autre que l'intégrale du champ scalaire le long du bord :

$$S_{\partial\Sigma} = \int_{\partial\Sigma} T(X(\tau)) d\tau.$$

Il est naturel de se demander comment coupler le tachyon à la théorie non-commutative lorsque le fond de cordes fermées contient un champ magnétique constant. Néanmoins, notre

expérience des calculs d'action effective nous fournit à bon marché des résultats concernant l'intégrale de chemin

$$Z[T] = \int DX e^{-S_\Sigma[X] - S_{\partial\Sigma}[X]},$$

sans qu'il soit besoin d'invoquer la dualité géométrique exposée dans le cadre de la théorie de jauge. Nous reviendrons plus loin à la question du couplage entre les tachyons et la théorie de jauge.

Il se trouve que le calcul de cette intégrale de chemins est un exercice proche de celui consistant à faire émerger les star-produits de la théorie des cordes commutative (nous travaillons avec le même fond de cordes fermées, et des conditions de Neumann dans toutes les directions). Bien sûr nous n'avons pas, dans cette théorie bosonique, ces modes fermioniques de fréquence nulle qui nous ont servi dans le chapitre précédent à construire le degré des champs de formes différentielles de Ramond–Ramond. Néanmoins le développement en série de Taylor du champs de tachyon induit des puissances arbitrairement élevées des fluctuations des coordonnées, dont la contraction à l'aide du propagateur des scalaires peut être menée à bien en utilisant la combinatoire du chapitre précédent. En séparant les coordonnées  $X^\mu$  en une partie  $x^\mu$  de fréquence nulle et une partie fluctuante  $\xi^\mu(\sigma)$ , nous avons en effet

$$T[X(\sigma)] = T(x) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \xi^{\mu_1}(\sigma) \dots \xi^{\mu_n}(\sigma) \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} T(x).$$

En développant l'intégrand de  $Z[T]$  à un certain ordre en  $T$ , on fait apparaître un polynôme en  $\xi^\mu \partial_\mu$ , dont la contribution à l'intégrale de chemin vient des contractions de Wick entre fluctuations du champ de coordonnées en des points du bord deux à deux distincts. Ces contributions commencent donc à l'ordre deux en  $T$ , lorsque deux points du bord,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , supportent un tachyon :

$$\int d\sigma_1 \int d\sigma_2 \sum_{p \geq 1} \left( \frac{1}{k!} \right)^2 \xi^{\mu_1}(\sigma_1) \dots \xi^{\mu_p}(\sigma_1) \xi^{\nu_1}(\sigma_2) \dots \xi^{\nu_p}(\sigma_2) \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_p} T(x) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_p} T(x).$$

Grâce à l'invariance par translation le long du bord du disque, l'intégrand ne dépend que de la différence  $\sigma_1 - \sigma_2$ , et une seule intégrale doit être calculée. Comme d'habitude, un facteur combinatoire  $k!$  vient du nombre de contractions, et nous utilisons le propagateur régularisé

$$D^{\mu\nu}(\sigma) = \left( \frac{\theta^{\mu\nu}}{2\pi\alpha'} \log \left( \frac{1 - e^{-\epsilon + i\sigma}}{1 - e^{-\epsilon - i\sigma}} \right) + G^{\mu\nu} \log |1 - e^{-\epsilon + i\sigma}|^2 \right).$$

Nous savons que ce propagateur intervient sous la forme antisymétrique de son premier terme pour restituer les prédictions de la théorie de jauge non-commutative. Cependant, en calculant les corrections sous-dominantes au-delà de la limite de Seiberg–Witten, nous avons remarqué que la combinatoire des contractions de Wick était la même, que l'on tienne compte ou non du second terme. L'article de Cornalba [Cor01] faisait l'hypothèse d'un fort champ magnétique, ce qui conduisait à négliger les dimensions anormales des champs de tachyons ; cette approximation est à notre calcul ce que la limite de Seiberg–Witten est à la théorie de jauge non-commutative déformée par le produit  $\star$ . Dans le contexte des termes de Wess–Zumino en théorie de jauge non-commutative le long d'une D-brane, le degré maximal du couplage était bien sûr la dimension du volume d'univers. Nous avons cependant remarqué

que la récurrence liant les opérateurs  $\tilde{*}_n$  les uns aux autres ne s'arrêterait pas pour un ordre  $n$  fini. Le présent contexte va rendre justice à cette remarque. Mais commençons par écrire le résultat de la discussion [Gra04d] à l'ordre deux en  $T$ , qui fait intervenir le star-produit binaire déformé :

$$Z[T] = \int dx \sqrt{\det(1+B)} \left( 1 + T(x) + \frac{1}{2!} T \tilde{*}_2 T(x) + \dots \right),$$

$$\tilde{*}_2 = \frac{\Gamma(1+2\partial G\partial')}{\Gamma(1-\partial\theta\partial' + \partial G\partial')\Gamma(1+\partial\theta\partial' + \partial G\partial')}.$$

Le terme d'ordre zéro est le terme de Born-Infeld habituel ; le terme linéaire en  $T$  ne reçoit pas de corrections, car celles-ci ne pourraient venir que de contractions entre scalaires insérés au même point du bord. Aux ordres supérieurs, la récurrence du chapitre précédent nous autorise à écrire

$$Z[T] = \int dx \sqrt{\det(1+B)} \left( 1 + T(x) + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} \tilde{*}_k [T]^k \right),$$

ce qui peut se symboliser par

$$Z[T] = \int dx \sqrt{\det(1+B)} \exp(-\tilde{*}T(x)).$$

La limite dans laquelle les dimensions anormales sont négligées donne sans surprise les star-produits  $*_k$ , ce qui veut dire que les tachyons sont transportés parallèlement le long d'une ligne de Wilson. Nous reviendrons sur la contribution des champs de jauge au moment de rapprocher les résultats sur les tachyons du secteur de jauge.

Un modèle exactement soluble, celui d'un tachyon quadratique, nous fournit une illustration de la validité de ce résultat. Nous allons rapprocher la situation présente du calcul par Wyllard des termes à  $2n$  dérivées agissant sur une  $2n$ -forme. Établissons un dictionnaire formel entre les deux calculs, ce qui nous permettra d'évaluer le potentiel de tachyons et d'observer que l'influence du fond de cordes fermées considéré peut être entièrement décrite comme une déformation de l'algèbre des champs scalaires tachyoniques, sans que la forme [GS00, KMM00a] du potentiel

$$U(T) = (1+T)e^{-T}$$

soit bouleversée.

Nous devons donc établir tous les changements induits dans le calcul de  $Z[T]$  par la substitution

$$\int d\tau d\theta D\phi^\mu A_\mu(\phi) \longrightarrow \int d\tau T[X(\tau)],$$

en remplaçant les tenseurs du champ de jauge  $F_{\mu\nu}$  par des champs de tachyon  $T$ , et en annulant la contribution des termes qui ne contiennent pas deux modes  $\psi_0$  de fermions pour chaque champ  $F_{\mu\nu}$ . En effet ces termes contiennent des fluctuations de champs fermioniques, qui n'ont pas d'analogue dans les contractions de Wick pour l'action effective des tachyons de la corde bosonique.

Nous avons affaire à un modèle exactement soluble, et de nombreuses simplifications sont induites par le caractère quadratique du champ  $T$ . En effet l'action des dérivées s'arrête très vite. Avec la substitution que nous avons prescrite,

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow T,$$

les termes de la théorie de jauge qui engendrent les termes contenant deux dérivées agissant sur chaque champ de tachyon, sont précisément les termes d'ordre  $n$  en  $F$  et portant  $2n$  dérivées, ceux-là même que Wyllard a évalués. Il nous suffit donc de traduire les résultats de Wyllard dans notre langage.

Les expressions à traduire ont une forme élégante, en fonction d'une deux-forme de courbure, correspondant formellement au tenseur non symétrique  $h_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}$ . Cette deux-forme, comme tout tenseur de Riemann, contient deux termes avec deux dérivées chacun :

$$S_{\rho_1\rho_2} = \partial_{\rho_1}\partial_{\rho_2}F + 2\iota_h\partial_{\rho_1}F \wedge \partial_{\rho_2}F.$$

Le premier se réduit au tenseur  $u$  des fréquences de l'oscillateur harmonique

$$T(X) := a + u_{\mu\nu}X^\mu X^\nu,$$

alors que le second est issu de fluctuations de fermions et n'engendre donc pas de correction dérivative à l'action effective des tachyons. Ainsi notre dictionnaire traduit le tenseur de Riemann en tenseur des fréquences :

$$S_{\rho_1\rho_2} \longrightarrow u_{\rho_1\rho_2}.$$

Wyllard définit les tenseurs  $W_{2n}$  pour  $n \geq 2$ , construits à partir de la courbure  $S$ , qui apportent les corrections suivantes au terme de Wess–Zumino sur la D9-brane :

$$S_{WZ} = \int C \wedge e^F \wedge \left( 1 + \sum_{n \geq 2} W_{2n} \right),$$

sans aucune limitation d'origine dimensionnelle sur l'indice  $n$ . Les termes calculés explicitement par Wyllard aux ordres les plus bas donnent lieu à une forme exponentielle :

$$\begin{aligned} W_4 &= \frac{\zeta(2)}{2} \text{tr}[(hu)^2], \\ W_6 &= \frac{\zeta(3)}{3} \text{tr}[(hu)^3], \\ W_8 &= \frac{\zeta(4)}{4} \text{tr}[(hu)^4] + \frac{1}{2} \left( \frac{\zeta(2)}{2} \right)^2 ([\text{tr}[(hu)^2]])^2, \\ 1 + \sum_{n \geq 2} W_{2n} &= \exp \left( \sum_{n \geq 2} \frac{\zeta(n)}{n} \text{tr}[(hu)^n] \right). \end{aligned}$$

Ainsi, les corrections exprimées plus haut engendrent un facteur exponentiel

$$\exp \left( \sum_{n \geq 2} \frac{\zeta(n)}{n} \text{tr}[(hu)^n] \right).$$

Puisque le tenseur  $u_{\mu\nu}$  est symétrique, l'opération de trace peut être effectuée en utilisant le tenseur  $h$  ou son transposé, contrairement à la situation que nous avons rencontrée en théorie de jauge. Nous retrouvons donc le résultat de [Oku01] :

$$\text{tr}[(G^{-1} + \theta)u]^n = \text{tr}[(hu)^n] = \text{tr}[(u^t h^t)^n] = \text{tr}[(u(G^{-1} - \theta))^n].$$

Nous utilisons l'identité que Wyllard avait écrite comme une remarque formelle :

$$\begin{aligned} -e^{-\gamma z} \Gamma(1 - z) &= \exp \left( \sum_{n \geq 2} \frac{\zeta(n)}{n} z^n \right), \\ Z &= e^{-a} \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} \text{tr}[(G^{-1} + \theta)u]^n \right) \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} \text{tr}[(G^{-1} - \theta)u]^n \right) \\ &= e^{-a} e^{-\gamma \text{tr} G^{-1} u} \sqrt{\det \Gamma(1 - (G^{-1} + \theta)u)} \sqrt{\det \Gamma(1 - (G^{-1} - \theta)u)}. \end{aligned}$$

La limite dans laquelle l'influence du champ de fond antisymétrique est négligée, correspond à la situation étudiée dans l'article [CFG<sup>+</sup>04], où la méthode de la fonction  $\beta$  a été appliquée jusqu'à l'ordre trois dans le champ de tachyon.

En ce qui concerne l'action effective, l'intervention de la métrique donne lieu à un terme cinétique [?], ce qui correspond, dans le modèle exactement soluble du tachyon quadratique, à l'équation

$$S(a, u) = \left( 1 + \text{tr}(G^{-1}u) - a \frac{\partial}{\partial a} - \text{tr} \left( u \frac{\partial}{\partial u} \right) \right) Z(a, u).$$

Quant au potentiel, il garde la forme prédite par Gerasimov et Shatashvili, à la modification près de l'algèbre des fonctions

$$V(T) = (1 + T) \tilde{*} e^{-\tilde{*} T}.$$

Dans leurs travaux sur les tachyons non-commutatifs, Dasgupta, Mukhi et Rajesh [DMR00], ont expliqué que l'universalité du potentiel de tachyon contraignait les modes d'impulsion nulle. En accord avec leur remarque, l'influence de nos opérateurs modifiés  $\tilde{*}$  disparaît pour les modes de Fourier de fréquence nulle.

## 5.5 Tachyons non-commutatifs et superconnexion

Nous allons citer quelques arguments dus à Witten [Wit00] en faveur d'une description des D-branes en K-théorie non-commutative. L'introduction de la notion de superconnexion est la principale nouveauté de cette section ; elle sera utilisée dans la suite pour écrire une action effective associant champs de jauge et tachyons pour une paire  $Dp$ -brane- anti- $\tilde{D}p$ -brane.

La superconnexion code dans un même objet les connexions sur les fibrés portés par chacune des deux branes, numérotées 1 et 2, et le tachyon, considéré comme un morphisme entre les deux fibrés.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} d + A^1 & T \\ \tilde{T} & d + A^2 \end{pmatrix}$$

Le tenseur du champ de jauge sur cette paire de fibrés (ou super-fibré, via la graduation  $\mathbb{Z}_2$  induite par la numérotation des deux branes), à l'aide duquel Quillen définit un caractère de Chern, est simplement le carré de la superconnexion, qui contient naturellement les deux tenseurs  $F^1$  et  $F^2$  et les dérivées covariantes du tachyon :

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} F^1 - T\bar{T} & T \\ \bar{T} & F^2 - T\bar{T} \end{pmatrix}$$

La théorie perturbative des cordes couple les tachyons aux photons par une dérivée covariante, comme il a été démontré dans les travaux de Garousi [Gar00] sur les amplitudes de diffusion. Au niveau géométrique, la perte de structure évoquée plus haut (absence de la notion de degré et de structure fibrée pour les tachyons), n'est en fait que superficielle, un artefact de notre calcul, qui momentanément ne considère que des champs scalaires. Une situation physique à la mesure de la conjecture de Sen (et du contexte des D-branes topologiques dans le modèle B, que nous aborderons dans les chapitres suivants), impose de considérer les tachyons comme des objets reliant deux fibrés (une paire brane/anti-brane).

L'objet mathématique adapté à cette situation est la superconnexion introduite par Quillen [Qui85]. La proximité entre cet objet et le caractère de Chern a incité Alishahiha, Ita et Oz [AIO01] à récrire les actions effectives à l'aide de la courbure associée. Le détail des corrections dérivatives n'a cependant pas été calculé dans cet article, ce qui a limité la précision des comparaisons avec les prédictions la théorie des champs de corde avec bord [KMM00b, KMM00a, ?]. J'essaierai de donner une version non-commutative de cette prescription de manière à assurer la compatibilité des deux approches.

Les séries de corrections calculées au chapitre précédent valent par l'élégance de leur interprétation non-commutative. La question de leur application renvoie à celle de leur compatibilité. Ayant obtenu les corrections à l'action effective des tachyons avec très peu de calculs supplémentaires, nous sommes naturellement convaincus que le tachyon et le champ de jauge doivent admettre une description conjointe, dans laquelle les deux champs seraient inclus, et multipliés à l'aide des produits  $*_n$  ou  $\tilde{*}_n$  que nous avons construits.

Nous devrions pouvoir reconstruire un analogue non-commutatif, naturel du point de vue de la K-théorie, de cette action effective, et compatible avec les termes de Chern-Simons [MS00] calculés par Mukhi et Suryanarayana. Les corrections dérivatives habilleraient naturellement la proposition de [AIO01] pour composer le résultat d'une prescription d'intégration  $L_*$  le long d'une ligne de Wilson. C'est cette dernière qui nous pose problème : deux sortes de champs de jauge sont impliqués par la paire de fibrés attachée à la situation que nous étudions. Il faudrait une notion de ligne de Wilson graduée traitant les deux transports parallèles de manière symétrique.

## Chapitre 6

# Modèle topologique B, de la non-commutativité à la géométrie complexe généralisée

*Les fibrés holomorphes stables correspondant aux D-branes du modèle topologique B en espace-cible plat sont rendus non-commutatifs en présence d'un fond de tenseur anti-symétrique. Nous allons utiliser les techniques précédemment développées pour montrer la stabilité de ces D-branes non-commutatives du modèle B.*

### 6.1 D-branes : surface d'univers et espace-temps

Dans ce qui suit, je vais introduire un doublement de certains degrés de liberté (liés à la structure complexe), doublement qui sera formalisé au chapitre suivant dans le cadre de la géométrie complexe généralisée à la Hitchin–Gualtieri [Hit03, Gua04]. Nous considérons les D-branes comme des objets supportés par une sous-variété de l'espace-cible. Les champs de jauge du spectre de cordes ouvertes font de cette sous-variété la base d'un fibré en cercles (nous ne considérons que des champs de jauge abéliens).

Les champs de fond issus du spectre de cordes fermées ont un effet sur la dynamique des D-branes, comme nous l'avons observé en exhibant les couplages sous la forme des star-produits, à l'aide desquels s'écrivent les actions effectives. Quant à la géométrie de ces fibrés, nous allons l'étudier avec le même fond de cordes fermées, dans le modèle B des cordes topologiques.

Les travaux de Mariño, Minasian, Moore et Strominger [MMMS00], qui donnent les équations hermitiennes de Yang–Mills comme conditions de supersymétrie sur une  $Dp$ -brane,

$$\hat{F}^{(0,2)} = 0, \tag{6.1}$$

$$\hat{F} \wedge \omega^{\frac{p-1}{2}} = 0. \tag{6.2}$$

illustrent le point de vue d'espace-temps sur les objets étendus. Ces équations sont en effet obtenues par un principe de symétrie appliqué à une action effective.

En revanche, Kapustin et Li ont adopté dans [KL03] le point de vue de la surface d'univers, dans lequel les D-branes sont définies par un ensemble de conditions de bord. L'article de



Kapustin sur la non-commutativité dans les théories de cordes topologiques [Kap04] contient la conjecture suivante : *les branes du modèle B sont équipées d'un fibré holomorphe, cette condition d'holomorphicité portant sur le tenseur du champ de jauge non-commutatif lié au tenseur ordinaire par la transformation de Seiberg–Witten.* J'ai établi cette conjecture, assortie d'une version non-commutative de la condition de stabilité (6.2) dans l'article [Gra04a].

## 6.2 Conditions de bord et structures complexes

Nous allons donc nous efforcer de produire une version des conditions d'holomorphicité et de stabilité adaptée à la théorie de jauge non-commutative émergeant de conditions de recollement de courants. De plus, et c'est là une application des résultats précédents concernant les star-produits, les non-linéarités de la transformation de Seiberg–Witten, et le grand nombre de dérivées intervenant dans l'expression des produits, nous fourniront un moyen de tester la condition d'holomorphicité dans le cas de champs non-uniformes.

Les théories superconformes nous ont habitués à travailler avec deux copies de l'algèbre superconforme, provenant des secteurs droit et gauche des modes des champs de coordonnées sur la surface d'univers. Nous considérons dans toute la suite un tore plat  $X \simeq T^6$  comme espace-cible. La métrique est notée  $G$ , et un champ de fond antisymétrique uniforme est présent. Quant à la structure complexe, nous ne la restreignons pas pour l'instant, et gardons les deux structures complexes  $I_+$  et  $I_-$  héritées des deux copies de l'algèbre superconforme. L'usage que nous allons en faire est le suivant : en imposant des conditions de bord aux courants, nous allons définir une structure complexe sur la somme directe du fibré tangent et du fibré cotangent. Les contraintes sur cette structure seront ensuite assez fortes pour prescrire une structure complexe au sens usuel, en fonction des données  $I_+$ ,  $I_-$ ,  $G$  et  $B$ , donnant ainsi lieu à la notion d'holomorphicité dont nous avons besoin.

Une simple écriture des structures complexes sous forme de tableau diagonal nous fournit un seul objet sur un espace de dimension double :

$$\begin{pmatrix} I_+ & 0 \\ 0 & I_- \end{pmatrix}.$$

Le champ antisymétrique  $B_{\mu\nu}$  interviendra en géométrie complexe généralisée dans les isométries de la somme du tangent et du cotangent ; dans notre cas, un changement de coordonnées sur les fermions

$$\psi^i = \frac{1}{2}(\psi_+^i + \psi_-^i),$$

$$\psi^i = \frac{1}{2}G_{ij}(\psi_+^j - \psi_-^j),$$

induit sur la matrice ci-dessus une transformation qui place les indices en position convenable, de sorte que la nouvelle matrice s'interprète dans cette base comme une structure complexe  $\mathcal{I}$  sur  $X \oplus X^*$ ,

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} \tilde{I} + (\delta P)B & -\delta P \\ \delta\omega + B(\delta P)B + B\tilde{I} + \tilde{I}^t B & -\tilde{I}^t - B\delta P \end{pmatrix},$$

L'hypothèse de [Kap04] consiste à considérer le cas d'une matrice triangulaire supérieure. Cette condition sera retrouvée de manière naturelle au cours du raisonnement qui va suivre. Les éléments de matrices sont notés de façon adaptée aux écarts entre les versions droite et gauche des différentes structures ( $\omega_+$  et  $\omega_-$  désignent les formes de Kähler droite et gauche induites,  $\delta\omega$  mesure leur différence,  $\delta P$  la différence entre leurs formes de Poisson inverses, alors que  $\tilde{I}$  désigne la structure complexe moyenne, qui n'est pas celle en fonction de laquelle nous aurons un fibré holomorphe) :

$$\begin{aligned}\delta\omega &= \frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-), \\ \delta P &= \frac{1}{2}(\omega_+^{-1} - \omega_-^{-1}), \\ \tilde{I} &= \frac{1}{2}(I_+ - I_-).\end{aligned}$$

Nous allons faire l'hypothèse d'une courbure localisée : le tenseur du champ de jauge  $F$  est supposé nul hors d'une certaine région. Cette hypothèse a également été utilisée par les auteurs de [MMMS00] afin d'évaluer une constante, qui leur a servi à proposer les équations de Yang–Mills hermitiennes non-commutatives<sup>1</sup>. De même nous allons travailler loin de la courbure non-triviale pour identifier une structure complexe unique, puis incorporer les champs de jauge en nous plaçant dans la région où la courbure se trouve concentrée. Ce sera chose faite en substituant la combinaison  $B + F$  au champ  $B$ , par l'argument habituel d'invariance de jauge. Loin de la courbure, donc, les conditions de bord pour les fermions s'écrivent simplement en fonction du champ  $B$  et des sections des fibrés tangent et cotangent utilisées pour transformer la structure complexe :

$$\rho_i = -B_{ij}\psi^j.$$

En substituant ces équations dans la condition de recollement entre les R-courants, et en incorporant les champs de jauge de la manière décrite plus haut, nous obtenons une contrainte portant sur le tenseur du champ de jauge (ordinaire)  $F$ , qui n'est pas une contrainte d'holomorphie comme celle que nous avons exposée au chapitre 1. En effet, elle contient un second membre :

$$FI + I^t F = -F\delta P F, \quad (6.3)$$

avec l'écart de Poisson et la structure complexe suivants

$$\begin{aligned}\delta P &= I\theta + \theta I^t \\ I &:= \tilde{I} + (\delta P)B, \\ \delta P &= I\theta + \theta I^t,\end{aligned}$$

où  $\theta$  désigne bien sûr l'inverse du tenseur  $B$ . Deux remarques formelles motivent la transformation de Seiberg–Witten que nous allons appliquer :

1. L'annulation de l'échelle de non-commutativité  $\theta$  entraîne l'annulation du second membre, et l'holomorphie du fibré ordinaire. Le second membre est donc susceptible d'être corrélé à la prise en compte de la non-commutativité ;

---

<sup>1</sup>Ils ont cependant utilisé la transformation de Seiberg–Witten des champs constants, ce qui rend l'apport de la théorie de jauge non-commutative nécessaire pour compléter les résultats obtenus du point de vue d'espace-temps.

2. La non-linéarité du second membre rappelle la non-linéarité de la transformation de Seiberg–Witten.

Kapustin a justifié ces deux remarques pour des champs constants, mais ce test, à ce stade de notre raisonnement, n’est que formel. Il souffre du même manque de cohérence interne que la proposition non-commutative à la MMMS : une étape du raisonnement suppose une concentration de la courbure, et partant des champs variables, or la proposition utilise la transformation entre champs constants. Nous allons voir que les star-produits modifiés apportent une solution à ce problème.

### 6.3 Condition de stabilité

La condition de stabilité (supersymétrie) donnée par le recollement des opérateurs de flot spectral, une fois imposée aux D-branes topologiques, fait d’elles des D-branes supersymétriques de la théorie des cordes. En d’autres termes, les conditions de bord sur les R-courants et le flot spectral dans le modèle B doivent conduire aux contraintes d’holomorphicité et de Yang–Mills hermitiennes à la MMMS, c’est-à-dire à des solitons supersymétriques d’espace-temps.

En supposant que la non-commutativité permette effectivement d’absorber par ses non-linéarités le défaut quadratique d’holomorphicité, nous pouvons d’ores et déjà appliquer l’une des leçons apprises en théorie de jauge non-commutative. Les raisonnements que nous avons faits plus haut nous ont convaincus que les couplages de Ramond–Ramond, quel que soit leur degré, possédaient une expression non-commutative. Cette expression apparaît lorsque nous rendons invariante de jauge l’expression écrite pour des champs constants. Nous avons fait des calculs concernant les couplages aux formes de Ramond–Ramond de degré inférieur à la dimension du volume d’univers. Nous avons mentionné l’existence d’une identité topologique correspondant au couplage à la forme de degré maximal  $C^{(10)}$ . Elle s’écrit

$$\delta(k) = \int dx \, L_* \left( \sqrt{\det(1 - \theta \hat{F})}, W_k(x) \right) * e^{ikx}.$$

Nous reconnaissons ici une situation analogue : une certaine quantité définie dans le contexte de D-branes portant des champs de jauge, la phase  $e^{i\alpha}$ , possède une signification indépendante du champ de jauge, en l’occurrence elle décrit une supercharge conservée. Si la théorie de jauge possède une version non-commutative, alors cette phase doit être insensible à la transformation de Seiberg–Witten. Il suffit donc d’appliquer le principe qui nous a réussi dans le contexte des couplages de Ramond–Ramond, en écrivant une expression valable pour des champs constants (c’est ce qui a été fait dans la proposition MMMS), puis en promenant cette expression le long d’un segment de Wilson de longueur proportionnelle à l’impulsion de chaque mode. Le relation (6.2) découle donc comme une identité topologique de la condition d’holomorphicité de la transformée de Seiberg–Witten. Il nous reste à établir cette condition d’holomorphicité.

## 6.4 Non-commutativité et holomorphie

Puisque le tenseur du champ de jauge apparaît à des puissances différentes dans les deux membre de notre condition d'holomorphie éventuelle, il est naturel de traiter la transformation de Seiberg–Witten ordre par ordre en le champ de jauge. Le second membre devrait être compensé par les premières non-linéarités, tandis que les non-linéarités d'ordre supérieur se compenseraient ordre par ordre, sans donner de contrainte nouvelle sur le fibré.

La relation (6.3) exprimant le défaut d'holomorphie est adaptée au sens dans lequel se présente la solution des équations de Seiberg–Witten exposée au chapitre précédent. En effet, en substituant

$$F_{ij}(k) = \int dx L_* \left( \sqrt{\det(1 - \theta \hat{F})}, \hat{F}_{ik} \left( \frac{1}{1 - \theta \hat{F}} \right)_j^k, W_k(x) \right) * e^{ikx} \quad (6.4)$$

dans la transformée de Fourier de la condition (6.3), nous obtenons une équation concernant le champ de jauge non-commutatif. Il nous reste à tenir compte des non-linéarités afin de décider si une telle équation peut se lire comme une honnête condition d'holomorphie sur  $\hat{F}$ , au sens de la structure complexe  $I$  incluant le champ antisymétrique. Nous devons donc développer en puissances du champ de jauge non-commutatif pour traiter séparément les non-linéarités de degrés différents. Le membre de gauche de l'équation de défaut (6.3) ne contient qu'une observable dans la prescription d'intégration  $L_*$ . Il est donc permis de le récrire comme

$$FI + I^t F = \int dx L_* \left( \sqrt{\det(1 - \theta \hat{F})}, \left( \hat{F} \frac{1}{1 - \theta \hat{F}} I + I^t \hat{F} \frac{1}{1 - \theta \hat{F}} \right), W_k(x) \right) * e^{ikx},$$

puisque les champs de jauge effectuant le transport parallèle ne portent pas d'indices (la structure complexe  $I$  ne voit pas la prescription  $L_*$ ). Les calculs commencent avec le membre de droite, puisque les deux tenseurs  $F$  doivent être attachés à la ligne de Wilson indépendamment l'un de l'autre. Le mode de Fourier d'impulsion  $k_\mu$  du membre de droite prend la forme d'un produit de convolution entre deux segments de Wilson, dont les longueurs ont pour somme  $\theta^{\mu\nu} k_\nu$ , chacune portant l'un des champs attaché à son extrémité :

Cette image est équivalente à la combinaison de deux segments en un seul, de longueur  $\theta^{\mu\nu} k_\nu$ , avec insertion d'une seconde observable à un point arbitraire de l'intérieur. Le mode  $k_\mu$  dans l'espace de Fourier donne lieu à la relation

$$\int dx L_* \left( \sqrt{\det(1 - \theta \hat{F})}, \hat{F} \frac{1}{1 - \theta \hat{F}}, \left( I \theta \hat{F} \frac{1}{1 - \theta \hat{F}} + \theta I^t \hat{F} \frac{1}{1 - \theta \hat{F}} \right), W_k(x) \right) * e^{ikx}.$$

Grâce à la technologie développée au chapitre précédent, nous allons pouvoir écrire des conditions de cohérence entre le membre de droite et le membre de gauche de (6.3) ordre par ordre dans le champ de jauge. les dérivées contenues dans les opérateurs  $*_n$  sont là pour prolonger la validité du raisonnement au cas des champs non uniformes.

le développement de (6.3) au premier ordre en  $\hat{F}$  n'est autre que la condition d'holomorphie (6.1) que nous cherchons à établir, puisque le défaut d'holomorphie ne débute que par un terme quadratique :

$$\hat{F}I + I^t\hat{F} = o(\hat{F}).$$

À l'ordre suivant, le membre de droite contient un seul terme, parce que chacun des deux indices de forme différentielle doit être apporté par un champ  $\hat{F}$ , sans contribution possible du pfaffien ou du dénominateur. Dans le membre de gauche, ce terme peut être comparé au terme quadratique qui apparaît dans le développement de l'application de Seiberg–Witten dans l'espace des positions :

$$F_{ij} = \hat{F}_{ij} + \theta^{mn} \langle \hat{F}_{im}, \hat{F}_{nj} \rangle_{*2} - \frac{1}{2} \theta^{mn} \langle \hat{F}_{nm}, \hat{F}_{ij} \rangle_{*2} + \theta^{mn} \partial_n \langle \hat{A}_m, \hat{F}_{ij} \rangle_{*2} + O(\hat{F}^3).$$

Nous pouvons lire la condition à vérifier par le champ de jauge pour assurer la cohérence du développement :

$$0 = -\frac{1}{2} \theta^{mn} \langle \hat{F}_{nm}, (\hat{F}I + I^t\hat{F})_{ij} \rangle_{*2} + \theta^{mn} \partial_n \langle \hat{A}_m, (\hat{F}I + I^t\hat{F})_{ij} \rangle_{*2}.$$

Nous observons que cette condition est vérifiée dès que la condition d'holomorphicité non-commutative (6.1) l'est. Nous avons donc dépassé le cas des champs constants, grâce aux dérivées contenues dans  $*_2$ .

Un développement plus poussé en puissances du champ de jauge engendre des contributions plus compliquées, mais grâce à la transparence de la structure complexe vis-à-vis de la prescription d'ordre  $L_*$ , la structure que nous avons identifiée aux petits ordres n'est pas bouleversée. Dans le membre de gauche, la condition d'holomorphicité  $\hat{F}^{(0,2)} = 0$  assure que l'un des arguments sur lesquels agissent les différents opérateurs différentiels est nul, celui précisément dont les deux indices de formes différentielles sont portés par le même champ  $\hat{F}$ . Les champs de jauge provenant du développement de la ligne de Wilson ayant déjà tous leurs indices contactés, ils ne changent rien à l'affaire.

Nous allons argumenter en faveur d'une compensation entre les défauts aux ordres plus élevés dans le champ de jauge. Le pfaffien et la ligne de Wilson, avec leurs contributions aux indices déjà contractés, sont les mêmes de part et d'autre. En revanche, le développement des dénominateurs contenus dans l'application de Seiberg–Witten (6.4) libère des indices. Il engendre des termes dans lesquels deux indices sont portés par des champs de jauge différents. En passant d'un ordre au suivant dans le développement d'un dénominateur, nous pouvons jouer le même jeu que précédemment, et ce qui ne peut pas être comparé entre les deux membres sera annulé par la condition d'holomorphicité.

Le pfaffien et la ligne de Wilson, remis en place des deux côtés, complètent la cohérence entre les deux différents développements de la version non-commutative de (6.3), à des termes près qui s'annulent sur un fibré holomorphe non-commutatif suivant (6.1).

## 6.5 Vers la géométrie complexe généralisée

Nous avons donc appliqué le formalisme des produits de Moyal modifiés pour montrer la robustesse de la non-commutativité vis-à-vis du twist topologique du modèle B. La structure complexe a été fixée à partir de conditions de bord sur un espace dédoublé de degrés de liberté, obtenu en considérant sur un pied d'égalité des champs de vecteurs et de formes

différentielles.

La somme du fibré tangent et du fibré conormal à une sous-variété supportant une D-brane est un objet naturel, à cause des champs de jauge portés par le volume d'univers, et des scalaires transverses. De plus, les symétries  $O(d, d)$  qui apparaissent dans les situations indépendantes de  $d$  coordonnées [MV91] ont été étudiées par Hassan dans [Has95] en relation avec la T-dualité et le problème de l'inclusion du champ antisymétrique. Au chapitre suivant, nous allons aborder la symétrie miroir en présence de D-branes, ce qui nous forcera à introduire la notion de spineur pur [Car37, Che54, Hit03, Gua04], somme de formes différentielles sur laquelle des sommes de vecteurs et de formes différentielles agissent comme une algèbre de Clifford.



## Chapitre 7

# Symétrie miroir en présence de D-branes

*Dans ce chapitre, nous reprenons les conditions de bord définissant les D-branes topologiques, sans nous limiter aux D-branes lagrangiennes dans le modèle A. Nous utilisons d'abord des techniques de réduction symplectique. Nous partons des relations de symétrie miroir obtenues par Leung dans le modèle B et par Thomas dans le modèle A, et nous les complétons par des contributions du champ de jauge dictées par l'action des champs de vecteurs hamiltoniens. La comparaison entre les deux modèles topologiques fait émerger une notion de spineur pur modifié par les champs de jauge, compatible avec la symétrie miroir sur une variété de Calabi–Yau fibrée en tores  $T^3$ .*

### 7.1 Argument de Strominger–Yau–Zaslow : fibration en tores $T^3$

#### Espaces de modules et T-dualité

Suivons l'argumentation de Strominger, Yau et Zaslow (SYZ) exposé dans leur article [SYZ96], ce qui nous fera entrer dans le domaine de la symétrie miroir en présence de D-branes. Dans cette section, les D-branes du modèle A seront considérées comme lagrangiennes et équipées d'une connexion plate. La question des A-branes non-lagrangiennes ne sera abordée que dans la section sur la modification des spineurs purs par les champs de jauge. Nous considérons une variété de Calabi–Yau de dimension complexe trois, notée  $X$ , et nous supposons qu'elle possède une variété miroir  $\tilde{X}$  qui vérifie encore la condition de Calabi–Yau. La variété  $X$  est supposée simplement connexe, hypothèse qui est utilisée pour affirmer que la D-brane occupant tout l'espace n'a pas de modules : le seul fibré dont elle peut être la base est un fibré trivial. À l'opposé, nous pouvons considérer une D0-brane ; elle n'a pas non plus de module associé au fibré qu'elle porte, puisque celui-ci est automatiquement trivial faute de changement de cartes sur une base de dimension zéro. Ses modules proviennent de sa position sur la variété  $X$ . Comme la D0-brane peut se trouver en un point quelconque, son espace de modules est l'espace  $X$  tout entier.

Les cycles miroirs sur  $\tilde{X}$  des deux cycles discutés précédemment doivent posséder les mêmes espaces de modules, mais leurs dimensions ne sont pas 0 et 6. Ainsi, soit  $L$  le cycle miroir du cycle de dimension six  $X$ . Il doit posséder un espace de modules de dimension six, et cet espace n'est autre que le miroir de  $\tilde{X}$ . Nous apprenons donc que la variété miroir doit pouvoir être réalisée comme espace de modules d'une D-brane. Quant au cycle



$L$ , c'est un tore lagrangien. Comme on peut voir l'espace de modules  $\mathcal{M}(L)$  de la D-brane  $L$ , comme un espace fibré au-dessus de son espace de modules de variété spéciale lagrangienne  $\mathcal{M}_{\text{sLag}}(L) \simeq X$ , la fibre étant simplement la donnée de la fibration  $U(1)$ , c'est-à-dire un tore dont la dimension réelle est le premier nombre de Betti de  $L$ , soit 3. La variété de Calabi–Yau  $X$  est donc fibrée en tores  $T^3$ .

De plus, un calcul utilisant l'action de Dirac–Born–Infeld, effectué dans un régime suffisamment classique, donne à voir la symétrie miroir comme T-dualité le long des trois cercles de chaque fibre. Tout ce raisonnement est effectué dans une limite de grand volume ou de grande structure complexe, dans laquelle les corrections provenant des instantons de disques peuvent être négligées.

## 7.2 Spineurs purs

### Géométrie complexe généralisée

L'introduction par Hitchin de la géométrie complexe généralisée a fourni un cadre unifié aux aspects symplectiques et complexes de la géométrie des D-branes topologiques.

Considérons l'action suivante de la somme du tangent  $T$  et du cotangent  $T^*$  d'une variété, sur une somme formelle  $h$  de formes différentielles :

$$(v, \phi).h = \iota_v h + \phi \wedge h.$$

C'est l'action la plus simple que l'on puisse écrire en utilisant les règles algébriques de multiplication intérieure et extérieure.

Un fait conduit à considérer les sommes de formes différentielles comme des spineurs : il est possible, toujours par simple utilisation de ces mêmes relations algébriques, d'écrire une algèbre de Clifford sur la somme du tangent et du cotangent,

$$\begin{aligned}\gamma^\mu &:= dx^\mu, \\ \gamma_\nu &= \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \\ \{\gamma^\mu, \gamma_\nu\} &= \delta^\mu_\nu.\end{aligned}$$

Le tenseur  $\delta^\mu_\nu$  apparaissant dans le membre de droite n'est pas une métrique sur un espace plat mais un simple tenseur unité sans interprétation en géométrie riemannienne.

Munis de l'action de  $T \oplus T^*$ , considérons les vides de l'algèbre de Clifford, ou *spineurs purs*, c'est-à-dire les formes différentielles annihilées par la moitié des générateurs de l'algèbre. Si l'espace-cible considéré est une variété de Calabi–Yau de dimension complexe trois, deux spineurs purs de rangs différents peuvent être exhibés :

- l'un provenant de la géométrie complexe, qui n'est autre que la trois-forme holomorphe  $\Omega$ , annihilée par les vecteurs de l'espace de dimension réelle trois  $T^{(1,0)} \oplus T^{*(0,1)}$ , par manque d'indices holomorphes,
- l'autre provenant de la géométrie de Kähler, et donné par l'exponentielle de la forme de Kähler  $e^\omega$ . Il est en effet clair que la forme différentielle 1 est annihilée par tout l'espace tangent ;

d'autre part on montre que le produit de ce spineur pur par l'exponentielle de la deux-forme  $\omega$  est encore pur, son annihilateur étant l'ensemble des sommes s'écrivant  $v + \iota_v \omega$ ,  $v \in T$ .

## Échange de spineurs purs

La symétrie miroir échange les deux spineurs purs que nous avons identifiés en géométrie complexe généralisée sur toute variété de Calabi–Yau possédant une fibration en tores  $T^3$  :

$$\Omega \longleftrightarrow e^{i\omega}.$$

Nous reviendrons sur cette relation en même temps que nous établirons sa version modifiée par les champs de jauge. La condition de Calabi–Yau a été affaiblie en une condition de structure  $SU(3)$  dans [FMT05] en présence d'un champ antisymétrique  $B_{\mu\nu}$ .

## 7.3 Inclusion de D-branes

Revenons aux notions concernant les D-branes topologiques introduites au début de ce mémoire. Pour introduire un secteur de cordes ouvertes, il faut préciser un ensemble de conditions de bord pour les équations du mouvement. Ces conditions de bord donnent les points où peuvent s'appuyer les extrémités des cordes ouvertes. Elles donnent l'équation des D-branes. De même que ces conditions de bord brisent une partie de la symétrie de Poincaré en introduisant un défaut topologique dans l'espace-temps, elles brisent une partie de la supersymétrie. Dans le cas présent, seule une certaine combinaison des deux générateurs de supersymétrie correspondra à une supersymétrie non brisée. Le choix de cette combinaison

$$Q = \cos \alpha Q_1 + \sin \alpha Q_2$$

est donné par une certaine phase complexe  $e^{i\alpha}$ . On retrouve cette phase dans la condition de bord sur les opérateurs de flot spectral  $S$ , puisque ces opérateurs assurent la supersymétrie d'espace-temps. Sur la D-brane, ces conditions s'écrivent

$$S_+ = e^{i\alpha} S_-.$$

Le paramètre  $\alpha$  doit être constant sur toute la D-brane, de façon à bien définir une supersymétrie non brisée associée au défaut topologique dans sa totalité. L'existence de ce paramètre constant sur la sous-variété lagrangienne supportant la D-brane dans le modèle A, confère à cette sous-variété la qualité de sous-variété *spéciale* lagrangienne.

Dans le modèle B, la dimension 3 n'est plus privilégiée, mais les dimensions paires le sont, puisque les indices holomorphes et anti-holomorphes ne sont pas mélangés par les conditions de bord. L'interprétation de la phase  $\alpha$  n'est donc plus la même que dans le modèle A, puisque les branes ne se trouvent plus sur des sous-variétés lagrangiennes. Néanmoins, la prescription de proportionnalité entre les courants de flot spectral est toujours valable comme condition de stabilité, et peut être utilisée pour obtenir les D-branes stables du modèle B des équations d'instantons par une approche de surface d'univers.

## 7.4 Des A-branes spéciales lagrangiennes aux B-branes

Puisque nous avons accepté l'idée (ou fait l'hypothèse) d'une fibration en tores  $T^3$  de la variété de Calabi–Yau  $X$  de dimension complexe trois, nous pouvons effectuer une transformation de T-dualité le long de chacun des trois cercles de chaque fibre, et obtenir ainsi la variété miroir notée  $\hat{X}$ . Nous travaillons formellement, avec les ingrédients complexes et kähleriens que nous avons à notre disposition.

Nous allons d'abord passer en revue la démarche de Leung, Yau et Zaslow [LYZ02], qui relie par ces trois T-dualités une A-brane spéciale lagrangienne à une B-brane vérifiant la condition de stabilité déduite par Mariño, Minasian, Moore et Strominger [MMMS00] via une approche d'espace-temps. J'adopte ici non pas ce point de vue d'espace-temps, mais le point de vue géométrique de la symétrie miroir en présence de D-branes, dans le but de présenter les résultats obtenus en collaboration avec Minasian [GM04], qui complètent ceux de [LYZ02], en autorisant des configurations plus générales pour les champs de jauge dans le modèle A, et par la même occasion des géométries non-lagrangiennes pour les A-branes. Nous mettrons donc en évidence les restrictions de l'approche de [LYZ02] afin de motiver la généralisation qui suivra.

L'objet donné au départ est une A-brane spéciale lagrangienne (avec une connexion plate). Nous avons vu plus haut, lors de la discussion des conditions de bord pour les cordes topologiques, que les A-branes lagrangiennes équipées d'une connexion plate apparaissaient comme des solutions évidentes aux conditions de bord, du point de vue de la surface d'univers. Il est donc intéressant en soi de partir de telles branes comme données dans le modèle A, et de retrouver les équations de [MMMS00].

D'après les travaux de Calabi, une variété de Calabi–Yau possède un potentiel de Kähler vérifiant les équations de Monge–Ampère, c'est-à-dire qu'il existe une fonction scalaire  $\phi$  telle que la métrique et la forme de Kähler s'écrivent :

$$g = \sum_{i,j} \phi_{ij} (dx^i dx^j + dy^i dy^j),$$

$$\omega = \sum_{i,j} \phi_{ij} dz^i \wedge d\bar{z}^j.$$

Nous avons muni la base de la fibration de coordonnées locales  $x^i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ), et la fibre de coordonnées  $y^i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ). Les quantités notées  $\phi_{ij}$  sont les dérivées secondes de la fonction  $\phi$ , qui par hypothèse<sup>1</sup> ne dépend que des coordonnées sur la base,

$$\phi_{ij} := \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial y^j}.$$

Pour obtenir une sous-variété miroir équipée d'un fibré en cercles muni d'une connexion, nous modifions la connexion plate en lui ajoutant un terme écrit à l'aide des coordonnées

---

<sup>1</sup>Comme dans l'argument de Strominger–Yau–Zaslow, une brane lagrangienne ne coupe la fibre qu'en un point.

duales  $\tilde{y}$  du revêtement universel, mais qui sera bien défini sur le tore  $T^3$  dual, une fois inséré dans l'argument d'une exponentielle :

$$d \longrightarrow d + A := d + \tilde{y}_i dy^i,$$

$$e^{F'} := \int_{T_y^3} dy e^{F+dA}.$$

La dernière ligne exprime le caractère de Chern du modèle B comme une transformée de Fourier de celui du modèle A (en l'occurrence  $F = 0$ ). Nous reviendrons sur les caractères de Chern plus complexes qui sont autorisés dans le membre de droite par les conditions de bord.

Tout d'abord nous devons transformer la condition de stabilité par T-dualité le long des fibres. Partant de la condition spéciale de stabilité :

$$\text{Im}(e^{-i\theta} dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3) = 0, \quad (7.1)$$

écrite dans les coordonnées complexes

$$z^i := x^i + iy^i,$$

nous recherchons une formule dans les coordonnées complexes T-duales

$$\tilde{z}_i = x_i + i\tilde{y}_i.$$

La sous-variété lagrangienne  $L$  considérée étant transverse par rapport à chaque fibre, la restriction des coordonnées  $y$  à cette sous-variété fournit une section  $y(x)$  de la fibration en tores  $T^3$ . Nous allons exprimer la condition lagrangienne dans les coordonnées de la base et substituer la relation obtenue dans la condition spéciale, avec pour la forme symplectique la restriction suivante :

$$\omega|_L = \frac{i}{2} \sum_{i,j} \phi_{i,j} \left( dx^i + i \frac{\partial y^i}{\partial x^l} dx^l \right) \wedge \left( dx^j + i \frac{\partial y^j}{\partial x^l} dx^l \right).$$

Ceci implique une condition de fermeture sur une 1-forme :

$$d(\phi_{ij} y^j dx^i) = 0,$$

qui s'intègre localement d'après le lemme de Poincaré. Nous déduisons donc l'existence locale d'une fonction scalaire  $f$  telle que les différentielles des coordonnées complexes peuvent, une fois restreintes à la sous-variété lagrangienne  $L$ , s'écrire en fonction de la hessienne de  $f$  :

$$\phi_{ij} y^j = \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

$$dz^i|_L = (\delta_k^i + i\phi^{il} \text{Hess}_{lk} f) dx^k.$$

Nous obtenons la restriction à  $L$  de la trois-forme holomorphe, comme un multiple de la forme volume dans les coordonnées de la base :

$$dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3|_L = \det(I_3 + ig^{-1} \text{Hess} f) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

En d'autres termes, avant toute transformation de T-dualité, nous approchons via (??stab) de la forme des équations à la MMMS :

$$\cos \theta \operatorname{Re}(g + \operatorname{Hess} f) = \sin \theta \operatorname{Im}(g + \operatorname{Hess} f),$$

au point de pouvoir anticiper le fait que la fonction  $f$  aura à voir avec la connexion sur le cycle holomorphe obtenu par symétrie miroir.

Dans le modèle B, toute la courbure provient de la connexion de Poincaré, puisque nous sommes partis d'une connexion plate. L'annulation de la composante de type  $(2, 0)$  de cette courbure s'écrit

$$0 = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} - \frac{\partial y^k}{\partial x^i},$$

ce qui garantit l'existence locale d'une fonction scalaire, notée  $f$ , telle que

$$y_i = \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

ce qui identifie bien la hessienne de la primitive précédente au tenseur du champ de jauge sur la B-brane :

$$\cos \theta \operatorname{Re} (\exp(\tilde{\omega} + F)|_{\text{top}}) = \sin \theta \operatorname{Im} (\exp(\tilde{\omega} + F)|_{\text{top}}).$$

## Des B-branes holomorphes aux A-branes non-lagrangiennes sur le tore

Nous allons montrer, sur l'exemple de la fibration triviale en tores  $T^3$  qu'est le tore  $T^6$ , que les données précédentes sur le modèle A ne contiennent pas toutes les configurations accessibles par symétrie miroir à partir d'un fibré holomorphe. cet exemple a été exhibé dans [vE01] et est instructif comme critique de l'approche précédente, et aussi comme exemple du traitement de  $F$  comme une distribution, dont le support définit la position d'une D-brane. Sur une variété de Calabi–Yau plus générale, nous ferions ce calcul dans une carte locale sur la base. Nous décomposons le tenseur du champ de jauge associé à un fibré holomorphe suivant ses composantes dans la base adaptée au produit  $T^3 \times T^3$  (fibration triviale) :

$$\begin{aligned} F &= F_{\mu\nu}(dx^\mu \wedge dx^\nu - dy^\mu \wedge dy^\nu) + iF_{\mu\nu}(dx^\mu \wedge dy^\nu + dy^\mu \wedge dx^\nu) \\ &= F_{\mu\nu}(dx^\mu \wedge dx^\nu - dy^\mu \wedge dy^\nu) + iF_{\mu\nu}(dx^\mu \wedge dy^\nu - dy^\mu \wedge dx^\nu) \\ &= F_{\mu\nu}^{(A)}(dx^\mu \wedge dx^\nu - dy^\mu \wedge dy^\nu) + iF_{\mu\nu}^{(S)}(dx^\mu \wedge dy^\nu). \end{aligned}$$

Les blocs diagonaux ont un rang pair, puisque ce sont des matrices antisymétriques. Le cas lagrangien correspond au rang zéro, alors que le rang deux donne par transformation de Fourier–Mukai une A-brane non-lagrangienne équipé d'une fibré à courbure non nulle. Nous introduisons de nouvelles notations pour les blocs :

$$F = \mathcal{A}_{\mu\nu}(dx^\mu \wedge dx^\nu + dy^\mu \wedge dy^\nu) + \mathcal{S}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dy^\nu,$$

La transformation décrite dans [LYZ02] opère en sens inverse :

$$\begin{aligned} e^{F'} &= \int_{T_y^3} e^{dy_\mu d\tilde{y}^\mu} e^F \\ &= e^{\mathcal{A}_{\mu\nu}(dx^\mu \wedge dx^\nu)} \int_{T_y^3} e^{dy_\mu d\tilde{y}^\mu} e^{\mathcal{A}_{\mu\nu}dy^\mu \wedge dy^\nu + \mathcal{S}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dy^\nu}. \end{aligned}$$

Le cas  $\mathcal{A} = 0$  donne bien

$$\delta(\tilde{y}_\mu - \mathcal{S}_{\mu\nu}x^\nu),$$

qui n'est autre qu'une D-brane lagrangienne équipée d'une connexion plate. En revanche, si  $\mathcal{A}$  a pour rang deux, alors le calcul fait intervenir l'inverse d'une sous-matrice inversible de rang deux, notée  $\mathcal{A}^{-1}$ . Nous écrivons le résultat à l'aide de l'opération  $V^\perp \lrcorner (\cdot)$  définie dans [FMT05], et liée à la dualité de Hodge

$$V^\perp \lrcorner (e^{\alpha_1} \dots e^{\alpha_k}) = \frac{1}{(3-k)!} e^{\alpha_1 \dots \alpha_3} e_{\alpha_{k+1}} \dots e_{\alpha_3}, k = 1 \dots 3.$$

Le dual de Hodge de la deux-forme  $\mathcal{A}_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu$  est une un-forme le long de la fibre, à laquelle l'opération  $V^\perp$  associe un vecteur  $(V^\perp \lrcorner \mathcal{A})$ , qui définit la direction normale au support de  $\mathcal{A}$ . La codimension un de la D-brane résultante se lit sur l'argument du facteur  $\delta$  dans le résultat suivant :

$$e^{F'} = \delta\left((\tilde{y}_\mu - \mathcal{S}_{\mu\nu}x^\nu)(V^\perp \lrcorner \mathcal{A})^\mu\right) \exp\left(\mathcal{A}_{\mu\nu}(dx^\mu \wedge dx^\nu) + \frac{1}{2}(\mathcal{S}dx)_\mu (\mathcal{A}^{-1})^{\mu\nu}(\mathcal{S}dx)_\nu\right).$$

Cette D-brane n'est donc pas lagrangienne, et ne relève pas du traitement donné dans [LYZ02].

## 7.5 Réduction symplectique et appariements à la Atiyah–Bott

### Notion d'application moment

Cette notion est apparue en analyse globale dans les travaux de Souriau. La terminologie provient du contexte de la mécanique classique. Les applications moment sont l'équivalent des charges de Noether associées aux symétries, lorsqu'une structure symplectique est présente. L'exemple de l'homogénéité de l'espace en mécanique classique donne une première illustration. Soit une situation où l'on dispose d'une forme symplectique  $\omega$  et d'une symétrie de générateur  $X$ . Un champ de vecteurs appelé  $X^\sharp$  est induit par ce générateur sur la variété symplectique. Si le flot de ce champ de vecteurs dérive d'un hamiltonien  $\mu^X$ , ce hamiltonien est appelé application moment associée à la symétrie générée par  $X$ . Autrement dit :

$$d\mu^X = \iota_{X^\sharp} \omega.$$

Considérons la mécanique classique avec la forme symplectique usuelle sur l'espace des phases  $\mathbf{R}^6$  :

$$\omega := dp_i \wedge dq^i.$$

L'action des translations sur l'espace de phases est hamiltonienne. En effet, soit  $X$  un générateur de la translation dans la direction  $i$  ; le champ de vecteurs induit est  $X^\sharp = \partial/\partial q^i$ . Il suffit de calculer la contraction entre ce champ de vecteurs et la forme symplectique [dS01] :

$$\iota_{X^\sharp} \omega = dp_i.$$

On lit l'application moment associée au générateur des translations dans la direction  $i$ , qui n'est autre que l'impulsion  $p_i$ .

La généralisation de cette procédure dans le contexte des théories de jauge est l'objet de travaux d'Atiyah et Bott [AB82]. Nous allons l'appliquer aux symétries des deux modèles de cordes topologiques en présence d'une D-brane.

## Structure symplectique sur la théorie de jauge du modèle B

Cette structure, exhibée par Leung [Leu98], provient de l'intégration naturelle d'une forme différentielle de degré pair, fabriquée à partir du caractère de Chern en présence d'une structure de Kähler :

$$W(a, b) := \int_{Y^{2m}} a \wedge b^* \wedge \exp(\omega + F).$$

Montrons qu'il existe une application moment  $\mu^\psi$  associée à l'ajout d'une forme exacte  $d\psi$  au potentiel de jauge :

$$\mu^\psi(b) := \int_Y \psi \exp(\omega + F(b)).$$

Il suffit de dériver  $\mu^\psi$ , dans une direction notée  $h$ , pour lire la relation souhaitée :

$$d\mu^\psi(b).h = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int_Y \psi \exp(\omega + F(b + th)) \quad (7.2)$$

$$= \int_Y \psi dh \wedge \exp(\omega + F(b)) \quad (7.3)$$

$$= \iota_{d\psi} W.h. \quad (7.4)$$

L'annulation de la limite de faible champ  $F$  est la condition de stabilité dont les équations de MMMS ont donné des déformations. Les équations de MMMS se retrouvent donc dans l'approche symplectique des champs de jauge sur les B-branes.

## Le modèle A

Nous avons exposé au début de ce mémoire les conditions vérifiées par la géométrie et la théorie de jauge sur les A-branes. Nous avons mentionné la possibilité de l'existence de certaines A-branes coisotropes, suivant l'observation de Kapustin et Orlov [KO01]. Sans être lagrangiennes, ces A-branes sont encore définies par une condition de géométrie symplectique, ce qui induit une invariance sous l'action des champs de vecteurs hamiltoniens. Or cette symétrie implique le tenseur du champ de jauge  $F$ , via un terme qui ne peut pas être considéré comme une simple transformation de jauge  $U(1)$ . Nous allons identifier ce terme comme une modification de l'appariement à la Atiyah–Bott.

En effet, pour un champ de vecteurs hamiltonien,

$$V_h := \omega^{-1} dh,$$

dont le flot préserve la géométrie des A-branes, et notamment le noyau de  $\omega|_Y$ , nous pouvons calculer la dérivée de Lie de la connexion

$$\mathcal{L}_{V_h} A = \iota_{V_h} dA + d(\iota_{V_h} A).$$

Le premier terme s'annule avec la courbure sur les A-branes spéciales lagrangiennes abéliennes<sup>2</sup>. Le second terme est une forme exacte. Le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien

---

<sup>2</sup>Nous essaierons dans la section suivante, en faisant allusion aux commutateurs de scalaires transverses à la Myers, propres au cas non-abélien, de donner une preuve de notre formule miroir qui dépende moins de l'hypothèse d'une symétrie de jauge  $U(1)$ .

n'est donc rien d'autre qu'une transformation de jauge abélienne. En prenant en considération la possibilité de A-branes coisotropes (de dimension 5), nous devons par la même occasion prendre en compte le premier terme, qui lie l'action des champs de vecteurs hamiltoniens à une courbure de jauge non nulle.

Commençons par rappeler le raisonnement de Thomas [Tho] à l'origine de l'application moment pour l'action des champs de vecteurs hamiltoniens sur les A-branes spéciales lagrangiennes. Soit  $L$  une sous-variété lagrangienne. Pour une densité scalaire  $h$  et un champ de vecteurs  $V_u = \omega^{-1}du$ , nous pouvons écrire la dérivée de la quantité

$$\int_L h \Omega$$

par le flot de  $V_u$  noté  $\Phi_t$ , comme un appariement entre deux formes de degré un, via une intégration par parties

$$\begin{aligned} V_u \int_L h \Omega &= \int_L h \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\Phi_t^* \Omega) = \int_L h d(\iota_{V_u} \Omega) = \int_L dh \wedge (\iota_{V_u} \Omega) \\ &=: \rho(dh, du) \end{aligned}$$

Nous lisons donc l'appariement

$$\rho(a, b) = \int_L a \wedge (\iota_{\omega^{-1}b} \Omega).$$

Ainsi, après une fixation de jauge pour la phase de la condition spéciale lagrangienne, nous lisons l'application moment

$$\mu = \text{Im } \Omega|_L.$$

Modifions les quantités ci-dessus en les adaptant au cas d'une A-brane non-lagrangienne supportée par une sous-variété  $Y$  de dimension cinq. L'inclusion du tenseur  $F$  dans le flot du champ de vecteurs hamiltonien ajoute un terme,

$$\int_Y (d(\iota_{V_u} \Omega) \wedge F + \Omega \wedge d(\iota_{V_u} F)) = \int_Y h d\iota_{V_u} (\Omega \wedge F),$$

de sorte que cette somme correspond à la dérivée d'une application moment, associée à un nouvel appariement entre formes différentielles de degré un, contenant le tenseur du champ de jauge. Nous avons en effet

$$d\mu'^{dh} \cdot du = \iota_{dh} \rho' \cdot du,$$

moyennant les définitions

$$\rho'(a, b) := \int_L a \wedge (\iota_{\omega^{-1}b} (\Omega \wedge F)).$$

Il s'agit du terme d'ordre un dans le développement en puissances de  $F$  de  $\Omega \wedge e^F$ , où la courbure de jauge  $F$  est considérée comme une distribution, d'où une opération automatique de pull-back sur la D-brane. Cette quantité doit être l'image miroir de l'application moment évaluée pour les B-branes. Nous avons eu accès à cette conjecture par réduction symplectique, méthode alternative à la fois à l'approche d'espace-temps et à l'approche de surface d'univers.



## 7.6 T-dualité et symétrie-miroir

Nous arrivons donc à la formule d'échange par symétrie miroir de deux quantités qui se réduisent aux spineurs purs mentionnés plus haut si nous oublions les champs de jauge :

$$\Omega \wedge e^F \leftrightarrow e^{i\omega} \wedge e^F. \quad (7.5)$$

Passons à une preuve directe de cette formule miroir. La T-dualité, identifiée par Strominger, Yau et Zaslow avec la symétrie-miroir, permet de transformer les tenseurs reliés par notre proposition.

Il est important de considérer les deux quantités écrites ci-dessus comme étant définies dans tout l'espace-cible, et pas seulement le long des D-branes. La restriction au volume d'univers des D-branes est automatique si les caractères de Chern sont considérés comme des distributions supportées par les D-branes. De plus, les formules intrinsèques sur l'espace-cible sont à rapprocher des couplages de Ramond–Ramond obtenus par Hassan et Minasian [HM00]. L'inclusion des scalaires transverses à la Myers pourrait être un moyen d'obtenir des résultats pour des champs de jauge de rang plus élevé.

### T-dualité pour les cordes fermées

Les conventions sont les suivantes : nous désignerons par  $(x^1, x^2, x^3)$  les coordonnées locales sur la base, et par  $(y^1, y^2, y^3)$  les coordonnées sur la fibre ; les différentes quantités étudiées seront localement des fonctions des coordonnées  $x^i$ . La métrique et le tenseur antisymétrique s'adaptent à la fibration via les notations suivantes, avec des indices latins du milieu de l'alphabet pour les directions de base, et des indices grecs du début de l'alphabet pour les directions de fibre :

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= g_{ij} dx^i dx^j + h_{\alpha\beta} e^\alpha e^\beta. \\ B &= \frac{1}{2} B_{ij} dx^i \wedge dx^j + B_\alpha \wedge \left( dy^\alpha + \frac{1}{2} \lambda^\alpha \right) + \frac{1}{2} B_{\alpha\beta} e^\alpha \wedge e^\beta, \\ B_\alpha &= B_{\alpha i} dx^i, \\ \lambda^\alpha &= \lambda_i^\alpha dx^i. \\ e^\alpha &= dy^\alpha + \lambda^\alpha. \end{aligned}$$

Dans le cadre des variétés à structure  $SU(3)$ , nous avons, et c'est là une caractérisation des variétés à structure  $SU(3)$ , deux formes, de degrés deux et trois, notées  $\omega$  et  $\Omega$ , vérifiant

$$\begin{aligned} \omega \wedge \Omega &= 0, \\ \Omega \wedge \bar{\Omega} &= \frac{(2\omega)^3}{3!}. \end{aligned}$$

Dans le cas des variétés de Calabi–Yau, elles ne sont autres que la forme de Kähler et la trois-forme holomorphe. Elles s'expriment en fonction du vielbein holomorphe  $E^A$ , qui contient la donnée d'une structure presque complexe  $V_\alpha^A$  via la relation :

$$E^A = i e_i^A dx^i + V_\alpha^A e^\alpha.$$

Les formes différentielles en question sont construites sur le modèle de  $dz \wedge d\bar{z}$  et  $dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3$  comme

$$\Omega = E^1 \wedge E^2 \wedge E^3,$$

$$\omega = \frac{i}{2} \delta_{AB} E^A \wedge E^{\bar{B}} = -V_{i\alpha} dx^i \wedge e^\alpha.$$

La T-dualité ne concernant que les directions de fibre, les composantes  $g_{ij}$  et  $B_{ij}$  sont invariantes. Quant aux composantes avec un ou deux indices de fibre, elles se transforment selon

$$h_{\alpha\beta} \longleftrightarrow h^{\alpha\beta},$$

$$B_{\alpha\beta} \longleftrightarrow B^{\alpha\beta},$$

$$B_\alpha \longleftrightarrow \lambda^\alpha.$$

Le vielbein de la métrique T-duale  $\hat{h}^{\alpha\beta}$  s'obtient à partir de la structure presque complexe, du bloc  $h_{\alpha\beta}$  de la métrique et du tenseur antisymétrique via

$$\hat{V}^{a\alpha} = \left( \frac{1}{h+B} \right)^{\alpha\beta} V_\beta^a = V_\beta^a \left( \frac{1}{h-B} \right)^{\beta\alpha}.$$

Les transformations de T-dualité sont alors complétées par

$$V_\alpha^a \longleftrightarrow \hat{V}^{a\alpha},$$

$$V^{a\alpha} \longleftrightarrow \hat{V}_\alpha^a.$$

Nous faisons l'hypothèse d'un tenseur antisymétrique  $B$  ne comportant que des composantes munies d'un indice de base et d'un indice de fibre<sup>3</sup>, ce qui simplifie beaucoup le calcul du vielbein dual. La T-dualité se réduit alors à un échange de  $B_\alpha$  et  $\lambda^\alpha$ , ainsi qu'à des manipulations d'indices.

En l'absence du tenseur antisymétrique, nous avons déjà un échange de spineurs purs par T-dualité. Il s'exprime à l'aide d'un dual de Hodge généralisé, défini à l'aide de nos conventions de T-dualité, comme une simple succession de contractions et de manipulations d'indices. Nous récrivons d'abord la trois-forme  $\Omega$  comme une exponentielle de la structure complexe  $V_i^\alpha e_\alpha dx^i$ . Il suffit de développer  $E^1 \wedge E^2 \wedge E^3$  en substituant l'expression du vielbein holomorphe comme une somme de deux termes adaptés à la décomposition entre directions de base et direction de fibre. L'opération  $V^\perp \lrcorner (\cdot)$  est ensuite appliquée afin de préparer l'expression à l'application de la T-dualité (il s'agit d'une dualité de Hodge sur la fibre qui associe à une forme de degré  $k$  un vecteur à  $3-k$  indices). L'action de la T-dualité, par simple application des règles de transformation des indices, transforme l'argument de l'exponentielle en deux-forme  $\omega$  :

$$V_i^\alpha e_\alpha dx^i \longleftrightarrow V_{i\alpha} e^\alpha dx^i = \omega$$

$$V^\perp \lrcorner \Omega \longleftrightarrow \frac{i}{3!} e^{i\omega}.$$

---

<sup>3</sup>les composantes munies de deux indices de base sont inertes sous la T-dualité et peuvent être incorporées *in fine* sans frais.

Il nous reste à modifier cette formule par la contribution du tenseur antisymétrique, ce qui prépare l'inclusion des D-branes et du tenseur du champ de jauge.

$$\frac{i}{3!} T(e^{i\omega}) = V^\perp \lrcorner (e^B \Omega) e^{-B_\alpha \lambda^\alpha},$$

$$\Omega \longleftrightarrow \frac{i}{3!} V^\perp \lrcorner (e^B e^{i\omega}) e^{+B_\alpha \lambda^\alpha}.$$

Ces relations se récrivent en fonction de la courbure  $\mathcal{P}$  sur le fibré de Poincaré :

$$\frac{i}{3!} e^{i\omega+B} \longleftrightarrow \int_{T^3} e^{\mathcal{P}} e^B \Omega.$$

### T-dualité pour les cordes ouvertes

Nous allons inclure les D-branes et les champs de jauge dans cette transformation de T-dualité. Il est instructif de remarquer que les spineurs purs et les champs de Ramond–Ramond se transforment comme des spineurs de l'algèbre de Clifford  $Cl(d, d)$ . Cette analogie invite à exploiter les résultats de l'article de Hassan et Minasian [HM00] sur les couplages de Ramond–Ramond et la multiplication de Clifford. Nous allons considérer le tenseur  $F$  du champ de jauge comme un objet défini dans l'espace ambiant et non sur une sous-variété.

En particulier, le tenseur  $F$  est considéré comme une distribution, et la restriction au support du champ de jauge dans toute expression où apparaît  $F$  est sous-entendue. De plus, le champ de jauge et les scalaires transverses sont codés dans un même vecteur en dimension six. Ainsi, les composantes pourvues de deux indices de directions longitudinales de la D-brane sont les composantes habituelles du tenseur du champ de jauge. Les composantes pourvues de deux indices de directions transverses sont des commutateurs de scalaires transverse, qui s'annulent dans le cas abélien que nous étudions<sup>4</sup>. Quant aux termes portant un indice longitudinal et un indice transverse, ce sont des dérivées covariantes de scalaires transverses.

Les composantes à indices mixtes (base et fibre) du tenseur  $F$  sont transparentes pour l'opération  $V^\perp \lrcorner (\cdot)$ , comme l'étaient les composantes du tenseur  $B$  considéré dans le cas des cordes fermées. Les composantes à deux indices le long de la base sont insensibles à la T-dualité. En sous-entendant la présence de ces composantes, que nous pouvons restaurer facilement, nous notons les composantes restantes en oubliant l'indice  $i$  de la coordonnée de base :

$$F := (F_\alpha, f^\alpha),$$

où  $F_\alpha$  rassemble les composantes du tenseur du champ de jauge avec un indice le long de la base et un indice le long de la fibre, et où  $f^\alpha$  rassemble les dérivées de scalaires transverses étendus dans la direction de la fibre. Avec la contrainte de transversalité

$$F_\alpha f^\alpha = 0,$$

---

<sup>4</sup>Le fait que ces objets soient naturellement prévus par le langage que nous utilisons laisse penser que notre formalisme pourrait être adapté à l'étude de cas non-abéliens.

il n'y a aucune solidarité entre la notion de transversalité par rapport à la D-brane et celle de séparation entre directions de base et directions de fibre sur l'espace tangent.

Par les règles habituelles d'échange entre directions longitudinales et directions transverse, nous avons sous l'action de la T-dualité :

$$F_\alpha \longleftrightarrow f^\alpha.$$

La combinaison  $F_\alpha V^\alpha + V_\alpha f^\alpha$  est invariante, ce qui permet d'insérer toutes les composantes de  $Q := e^F$  dans la formule d'échange des spineurs purs par symétrie miroir en théorie des cordes fermées :

$$\frac{i}{3!}(Q \wedge e^{i\omega})e^B \longleftrightarrow \int_{T^3} e^P e^B (Q \wedge \Omega).$$

Une sous-variété généralisée semble s'identifier naturellement à une combinaison du fibré tangent et du fibré conormal [HM00, BB04]. Nous avons donc confirmé la formule issue de la réduction symplectique sous les hypothèses de [SYZ96], tout en prolongeant l'étude de la symétrie miroir en présence de D-branes selon le programme de Vafa [Vaf98] au-delà du cas des A-branes spéciales lagrangiennes envisagé par Leung, Yau et Zaslow [LYZ02].

La formule miroir (7.5) que nous venons d'établir a bien sûr un caractère plus intrinsèque que celle que nous avait inspiré l'échange des applications moments. Seuls deux termes impliquant le champ de jauge (et correspondant aux D-branes de dimensions trois et cinq) sont permis par le développement du caractère de Chern, pour des raisons dimensionnelles. Néanmoins, le résultat exprimé en fonction de  $e^F$  se prête à une interprétation topologique en K-théorie. En ce qui concerne les contributions gravitationnelles, que nous avons ignorées, une description en K-théorie des D-branes qui s'échangent par T-dualité devrait naturellement impliquer une contribution du genre elliptique de l'espace-cible, selon

$$Q = \sqrt{\hat{A}(X)} e^F.$$

À ce stade de la discussion, nous avons donc donné un traitement plus symétrique de la T-dualité en présence de D-branes, dans une limite de grand volume où les corrections induites par les instantons de cordes ouvertes peuvent être négligées. Prendre en compte de telles corrections imposerait de renoncer à l'hypothèse d'une fibration à la SYZ, ou tout au moins de la rendre plus précise en considérant par exemple des fibres singulières. Notre discussion est plus symétrique dans la mesure où elle ne privilégie pas les fibrés holomorphes qui proviennent de A-branes lagrangiennes par T-dualité.

De plus, le traitement par la géométrie complexe généralisée donne l'espoir d'une interpolation entre les modèles A et B, dans un cadre géométrique suffisamment ample pour incorporer tous les aspects sur lesquels se localisent les twists topologiques. Les A-branes coisotropes ont plutôt servi comme outils de cohérence interne, via leurs symétries, que d'exemples. Il est crucial que l'intervention des champs de jauge dans le modèle A puisse mélanger le tenseur du champ de jauge à la trois-forme holomorphe dans l'application-moment. Remarquons que l'hypothèse d'une variété de Calabi-Yau simplement connexe a été utilisée dans l'argument SYZ afin de pouvoir ignorer les modules du fibré porté par la D6-brane. Il

n'y a donc pas de cycle en homologie pour enrouler une A-brane de dimension cinq dans la géométrie que nous avons considérée. Néanmoins, un développement plus ample de la K-théorie dans le cadre de la géométrie complexe généralisée pourrait permettre de réaliser des A-branes non-lagrangiennes stables.

## Chapitre 8

# Conclusions et problèmes ouverts

### 8.1 Actions effectives de cordes ouvertes

#### Théories de jauge non-commutatives

La théorie de jauge non-commutative sur le volume d'univers des D-branes a été identifiée comme une limite d'échelle de la théorie des cordes, dans une situation où le fond de cordes fermées contient un fort champ antisymétrique  $B_{\mu\nu}$ . La dualité entre les descriptions commutative et non-commutative du secteur de jauge des cordes ouvertes, proposée par Seiberg et Witten, peut être explicitée dans le cas abélien, grâce aux contraintes très fortes imposées par l'invariance de jauge. Le haut degré de non-linéarité de cette transformation a de profondes conséquences sur la structure des actions effectives. En particulier, la non-localité de la théorie non-commutative induit des séries de corrections dérivatives qui couplent de champ de cordes fermées  $B_{\mu\nu}$  aux dérivées du champ de jauge (champ de cordes ouvertes).

J'ai retrouvé ces corrections dans l'article [Gra03] via un calcul direct d'intégrales de chemin en théorie des cordes, dans le langage commutatif ordinaire. Ce travail contient le premier calcul direct à tous les ordres en dérivées du champ de jauge, de corrections au secteur de jauge de l'action de Born–Infeld. Ce résultat constitue d'une part une vérification de la validité de la description non-commutative, et d'autre part une approche systématique permettant d'examiner les corrections aux actions effectives *au-delà* de la limite d'échelle. J'ai réalisé ce programme dans [Gra04c], et j'ai interprété les résultats comme une déformation de la description non-commutative. Ces corrections nous poussent à poser la question du statut des couplages de Ramond–Ramond au-delà de la K-théorie. En effet, c'est le caractère de Chern, sans corrections, qui est naturel en K-théorie. Ses modifications dans le couplage avec champs de jauge variables sont équipées d'une structure mathématique intimement liée à l'invariance de jauge. En effet, que ce soit dans la limite de Seiberg–Witten, avec les produits  $*_n$ , ou au-delà avec les produits déformés  $\tilde{*}_n$ , les rangs  $n$  sont liés les uns aux autres de manière à assurer l'invariance de jauge.

La versatilité des actions effectives et les redéfinitions non-linéaires des champs ne nous permettent cependant pas de dire que nous sommes allés au-delà de la K-théorie. Nous nous sommes plutôt approchés de la notion d'universalité dans les potentiels de tachyons. Disons que les redéfinitions des champs, telles que l'application de Seiberg–Witten, fournissent des moyens d'aborder des champs variables de manière adaptée à des configurations dans

lesquelles la courbure de jauge est localisée.

Des développements plus anciens sur les orbifolds asymétriques, dont nous avons donné un aperçu au moment du calcul du propagateur, ont associé le champ de fond antisymétrique à des rotations asymétriques. Les travaux récents de Pantev et Sharpe sur les symétries inefficaces jaugées et la symétrie miroir [PS05a, PS05b], pourraient donner lieu à des prolongements de cette approche, grâce notamment à l'asymétrie de la T-dualité et à son caractère inefficace sur le secteur gauche.

Certains développements [BKM03, DLMZ02] ont fait usage du produit de Moyal en dimension infinie pour écrire la théorie des champs de cordes comme une théorie des champs non-commutatifs. Des anomalies d'associativité, discutées dans les années 80 par Horowitz et Strominger [HS87], et liées à la brisure de l'invariance par translation lors du recollement de deux cordes ouvertes en leur milieu, ont refait une apparition à cette occasion. Je pense qu'elles pourraient faire l'objet d'une étude plus systématique à l'aide d'équations de descente [MSZ85, Zum].

## Potentiel effectif pour les tachyons

Certaines intégrales de chemin pour les cordes ouvertes, dont l'action classique contient un terme couplant un bord au champ de tachyon, codent la dynamique du tachyon sur un fond donné de cordes fermées. Dans le cas d'un champ  $B_{\mu\nu}$  infini ou nul, le calcul a été poussé jusqu'à la vérification de la conjecture de Sen sur la condensation des tachyons. La limite du champ infini est en rapport avec la non-commutativité évoquée plus haut.

Les techniques que j'ai développées dans ce contexte ont permis d'interpoler entre les deux régimes précédemment étudiés, via un dictionnaire formel [Gra04d]. Les déformations rencontrées dans le secteur de jauge se révèlent pertinentes pour les tachyons. Une interprétation non-commutative a également été conjecturée récemment pour le modèle exactement soluble des cordes  $p$ -adiques. J'ai établi cette conjecture en montrant dans [Gra04b] comment coupler un champ magnétique à un bord  $p$ -adique tout en conservant la validité de l'approche non-commutative dans l'étude des solitons scalaires.

Les résultats décrits dans cette thèse, notamment lors du détour par les cordes  $p$ -adiques et du passage aux cordes topologiques, confirment la robustesse de la non-commutativité. Pour aller plus loin, je mentionnerai les deux pistes de la non-commutativité dépendant du temps, étudiée par Dolan et Nappi [DN03], et du relèvement en supergravité des théories des champs non-commutatifs amorcé par Robbins et Sethi [RS03].

## 8.2 D-branes topologiques et symétrie miroir

Le problème de la stabilité des membranes de Dirichlet (D-branes) dans les théories de cordes topologiques a été abordé par des techniques d'espace-temps, fondées sur des actions effectives supersymétriques. La condition de stabilité, obtenue en 1999 par Minasian, Mariño, Moore et Strominger, est une déformation des équations de Yang–Mills hermitiennes.

En présence du champ de fond antisymétrique  $B_{\mu\nu}$ , ces équations ont fait l'objet d'une conjecture en 2003 : elles doivent posséder une version non-commutative. L'approche par des techniques de surface d'univers (conditions de bord) trouve un cadre géométrique naturel dans la géométrie complexe généralisée proposée récemment par Hitchin.

Les conditions de recollement des différents courants conservés (associés aux différentes symétries du problème) induisent des contraintes sur la courbure du champ de jauge le long des D-branes stables. J'ai établi dans l'article [Gra04a] le fait que ces contraintes donnent lieu à une condition d'holomorphie sur le fibré associé à une théorie de jauge non-commutative. Ceci établit la conjecture citée plus haut dans le modèle B, sensible à la géométrie complexe.

Concernant le modèle A, sensible à la géométrie symplectique, j'ai établi en collaboration avec Minasian un échange par symétrie miroir [GM04] entre la trois-forme holomorphe du modèle B et la structure symplectique du modèle A, en présence des champs de jauge, c'est-à-dire de structures fibrées codées par leur caractère de Chern, considéré comme une distribution. Les D-branes non-lagrangiennes du modèle A, avec leur caractère de Chern non-trivial, sont ainsi prises en compte par la symétrie miroir entre les deux modèles. Les D-branes coisotropes du modèle A font l'objet de développements récents [AZ05, Kap05] suggérant l'intervention de la non-commutativité même en l'absence d'holomorphie. La question de l'obtention de ces configurations à partir de nos B-branes stables non-commutatives se pose.

La multiplication des matrices gamma est apparue dans les couplages de Ramond–Ramond [HM00], ce qui crée une analogie avec le traitement des sommes de formes différentielles comme un module de Clifford, et donne lieu à des modifications des spineurs purs par le secteur de cordes ouvertes. Cette notion de spineur pur est issue de la géométrie complexe généralisée, qui trouve une réalisation naturelle en théorie des cordes et des D-branes. Les développements récents utilisant les spineurs purs, par Grassi et Vanhove [GV04], vont dans la direction de la M-théorie topologique à partir de constructions impliquant la limite de la super-particule. D'autre part, la quantification du problème variationnel de Hitchin a été récemment abordée par Pestun et Witten [PW05]. Les spineurs purs, que nous avons modifiés au niveau classique, devraient y jouer un rôle, en forçant l'inclusion de champs de jauge dans la fonctionnelle de Hitchin.





# Bibliographie

- [AB82] M. Atiyah et R. Bott, *The Yang–Mills equations over Riemann surfaces*, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. **A308**, 523–615 (1982).
- [AGB02] L. Álvarez-Gaumé et J. Barbón, *Morita duality and large- $N$  limits*, Nucl. Phys. **B623**, 165–200 (2002), hep-th/0109176.
- [AGVM03] L. Álvarez-Gaumé et M. A. Vázquez-Mozo, *General properties of noncommutative field theories*, Nucl. Phys. **B668**, 293–321 (2003), hep-th/0305093.
- [AIO01] M. Alishahiha, H. Ita et Y. Oz, *On superconnections and the tachyon effective action*, Phys. Lett. **B503**, 181–188 (2001), hep-th/0012222.
- [ARS99] A. Alekseev, A. Recknagel et V. Schomerus, *Non-commutative world-volume geometries : Branes on  $SU(2)$  and fuzzy spheres*, JHEP **09**, 023 (1999), hep-th/9908040.
- [AT88] O. D. Andreev et A. A. Tseytlin, *Cancellation Of Moebius Infinities And Derivative Corrections To Born–Infeld Lagrangian*, Nucl. Phys. **B311**, 205 (1988).
- [AZ05] M. Aldi et E. Zaslow, *Coisotropic branes, noncommutativity, and the mirror correspondence*, (2005), hep-th/0501247.
- [Bac98] C. Bachas, *Lectures on D-branes*, (1998), hep-th/9806199.
- [BB04] O. Ben-Bassat, *Mirror symmetry and generalized complex manifolds*, (2004), math.ag/0405303.
- [BF93] L. Brekke et P. Freund,  *$p$ -adic numbers in physics*, Phys. Rept. **233**, 1–66 (1993).
- [BFOW88] L. Brekke, P. Freund, M. Olson et E. Witten, *Nonarchimedean string dynamics*, Nucl. Phys. **B302**, 365 (1988).
- [BGKL00] R. Blumenhagen, L. Görlich, B. Körs et D. Lüst, *Asymmetric orbifolds, non-commutative geometry and type I string vacua*, Nucl. Phys. **B582**, 44–64 (2000), hep-th/0003024.
- [BKM03] I. Bars, I. Kishimoto et Y. Matsuo, *String amplitudes from Moyal string field theory*, Phys. Rev. **D67**, 066002 (2003), hep-th/0211131.
- [BP92] C. Bachas et M. Porrati, *Pair creation of open strings in an electric field*, Phys. Lett. **B296**, 77–84 (1992), hep-th/9209032.
- [Car37] E. Cartan, *La théorie des spineurs*, Hermann, 1937.
- [CDLOGP91] P. Candelas, X. De La Ossa, P. S. Green et L. Parkes, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nucl. Phys. **B359**, 21–74 (1991).

- [CDS98] A. Connes, M. Douglas et A. Schwarz, *Noncommutative geometry and matrix theory : Compactification on tori*, JHEP **02**, 003 (1998), hep-th/9711162.
- [CF00] A. S. Cattaneo et G. Felder, *A path integral approach to the Kontsevich quantization formula*, Commun. Math. Phys. **212**, 591–611 (2000), math.qa/9902090.
- [CFG<sup>+</sup>04] E. Coletti, V. Forini, G. Grignani, G. Nardelli et M. Orselli, *Exact potential and scattering amplitudes from the tachyon non-linear beta-function*, JHEP **03**, 030 (2004), hep-th/0402167.
- [CH99] C.-S. Chu et P.-M. Ho, *Noncommutative open string and D-brane*, Nucl. Phys. **B550**, 151–168 (1999), hep-th/9812219.
- [Che54] C. Chevalley, *The algebraic theory of spinors*, Columbia University Press, 1954.
- [CLNY87] J. Callan, C.G., C. Lovelace, C. Nappi et S. Yost, *Adding Holes and Crosscaps to the Superstring*, Nucl. Phys. **B293**, 83 (1987).
- [Cor00a] L. Cornalba, *Corrections to the Abelian Born–Infeld action arising from non-commutative geometry*, JHEP **09**, 017 (2000), hep-th/9912293.
- [Cor00b] L. Cornalba, *D-brane physics and noncommutative Yang–Mills theory*, Adv. Theor. Math. Phys. **4**, 271–281 (2000), hep-th/9909081.
- [Cor01] L. Cornalba, *Tachyon condensation in large magnetic fields with background independent string field theory*, Phys. Lett. **B504**, 55–60 (2001), hep-th/0010021.
- [CS74] S.-S. Chern et J. Simons, *Characteristic forms and geometric invariants*, Annals Math. **99**, 48–69 (1974).
- [DLMZ02] M. Douglas, H. Liu, G. Moore et B. Zwiebach, *Open string star as a continuous Moyal product*, JHEP **04**, 022 (2002), hep-th/0202087.
- [DMR00] K. Dasgupta, S. Mukhi et G. Rajesh, *Noncommutative tachyons*, JHEP **06**, 022 (2000), hep-th/0005006.
- [DMS01] S. Das, S. Mukhi et N. Suryanarayana, *Derivative corrections from noncommutativity*, JHEP **08**, 039 (2001), hep-th/0106024.
- [DN03] L. Dolan et C. R. Nappi, *Noncommutativity in a time-dependent background*, Phys. Lett. **B551**, 369–377 (2003), hep-th/0210030.
- [Dou95] M. Douglas, *Branes within branes*, (1995), hep-th/9512077.
- [dS01] A. C. da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, volume 1764 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, 2001.
- [DT01] S. Das et S. Trivedi, *Supergravity couplings to noncommutative branes, open Wilson lines and generalized star products*, JHEP **02**, 046 (2001), hep-th/0011131.
- [DVL00] P. Di Vecchia et A. Liccardo, *D branes in string theory. I*, NATO Adv. Study Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci. **556**, 1–59 (2000), hep-th/9912161.
- [ee03] K. H. et al., *Mirror Symmetry*, volume 1, Clay Mathematics Monographs, 2003.
- [FMT05] S. Fidanza, R. Minasian et A. Tomasiello, *Mirror symmetric SU(3)-structure manifolds with NS fluxes*, Commun. Math. Phys. **254**, 401–423 (2005), hep-th/0311122.

- [FO87] P. Freund et M. Olson, *Nonarchimedean strings*, Phys. Lett. **B199**, 186 (1987).
- [FO88] P. Frampton et Y. Okada, *The  $p$ -adic  $N$ -point function*, Phys. Rev. Lett. **60**, 484 (1988).
- [FT85] E. Fradkin et A. Tseytlin, *Nonlinear electrodynamics from quantized strings*, Phys. Lett. **B163**, 123 (1985).
- [Gar00] M. Garousi, *Tachyon couplings on non-BPS D-branes and Dirac-Born-Infeld action*, Nucl. Phys. **B584**, 284–299 (2000), hep-th/0003122.
- [GHI00] D. Gross, A. Hashimoto et N. Itzhaki, *Observables of non-commutative gauge theories*, Adv. Theor. Math. Phys. **4**, 893–928 (2000), hep-th/0008075.
- [Gho04] D. Ghoshal, *Exact noncommutative solitons in  $p$ -adic strings and BSFT*, JHEP **09**, 041 (2004), hep-th/0406259.
- [GK05] D. Ghoshal et T. Kawano, *Towards  $p$ -adic string in constant  $B$ -field*, Nucl. Phys. **B710**, 577–598 (2005), hep-th/0409311.
- [GM04] P. Grange et R. Minasian, *Modified pure spinors and mirror symmetry*, (2004), hep-th/0412086.
- [GPR94] A. Giveon, M. Porrati et E. Rabinovici, *Target space duality in string theory*, Phys. Rept. **244**, 77–202 (1994), hep-th/9401139.
- [Gra03] P. Grange, *Derivative corrections from boundary state computations*, Nucl. Phys. **B649**, 297–311 (2003), hep-th/0207211.
- [Gra04a] P. Grange, *Branes as stable holomorphic line bundles on the non-commutative torus*, JHEP **10**, 002 (2004), hep-th/0403126.
- [Gra04b] P. Grange, *Deformation of  $p$ -adic string amplitudes in a magnetic field*, (2004), hep-th/0409305.
- [Gra04c] P. Grange, *Modified star-products beyond the large- $B$  limit*, Phys. Lett. **B586**, 125–132 (2004), hep-th/0304059.
- [Gra04d] P. Grange, *Tachyon potential in a magnetic field with anomalous dimensions*, (2004), hep-th/0410180.
- [GS00] A. Gerasimov et S. Shatashvili, *On exact tachyon potential in open string field theory*, JHEP **10**, 034 (2000), hep-th/0009103.
- [Gua04] M. Gualtieri, *Generalized complex geometry*, PhD thesis, Oxford University, 2004.
- [GV04] P. A. Grassi et P. Vanhove, *Topological  $M$  theory from pure spinor formalism*, (2004), hep-th/0411167.
- [Har01] J. Harvey, *Komaba lectures on noncommutative solitons and D-branes*, (2001), hep-th/0102076.
- [Has95] S. Hassan,  *$O(d,d :R)$  deformations of complex structures and extended world sheet supersymmetry*, Nucl. Phys. **B454**, 86–102 (1995), hep-th/9408060.
- [Hit03] N. Hitchin, *Generalized Calabi-Yau manifolds*, Quart. J. Math. Oxford Ser. **54**, 281–308 (2003), math.dg/0209099.
- [HM00] S. F. Hassan et R. Minasian, *D-brane couplings, RR fields and Clifford multiplication*, (2000), hep-th/0008149.

- [HS87] G. Horowitz et A. Strominger, *Translations as inner derivations and associativity anomalies in open string field theory*, Phys. Lett. **B185**, 45 (1987).
- [Kap04] A. Kapustin, *Topological strings on noncommutative manifolds*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **1**, 49–81 (2004), hep-th/0310057.
- [Kap05] A. Kapustin, *A-branes and noncommutative geometry*, (2005), hep-th/0502212.
- [KL03] A. Kapustin et Y. Li, *Stability conditions for topological D-branes : A world-sheet approach*, (2003), hep-th/0311101.
- [KMM00a] D. Kutasov, M. Mariño et G. Moore, *Remarks on tachyon condensation in superstring field theory*, (2000), hep-th/0010108.
- [KMM00b] D. Kutasov, M. Mariño et G. Moore, *Some exact results on tachyon condensation in string field theory*, JHEP **10**, 045 (2000), hep-th/0009148.
- [KO01] A. Kapustin et D. Orlov, *Remarks on A-branes, mirror symmetry, and the Fukaya category*, (2001), hep-th/0109098.
- [Kon03] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds, I*, Lett. Math. Phys. **66**, 157–216 (2003), q-alg/9709040.
- [Leu93] N. Leung, *Differential geometric and symplectic interpretations of stability in the sense of Gieseker*, PhD thesis, M.I.T., 1993.
- [Leu98] N. Leung, *Symplectic structures on gauge theory*, Commun. Math. Phys. **193**, 47–67 (1998).
- [Liu01] H. Liu, *Star-Trek II : Star operations, open Wilson lines and the Seiberg–Witten map*, Nucl. Phys. **B614**, 305–329 (2001), hep-th/0011125.
- [LM01] H. Liu et J. Michelson, *\*-trek III : The search for Ramond-Ramond couplings*, Nucl. Phys. **B614**, 330–366 (2001), hep-th/0107172.
- [LYZ02] N. Leung, S.-T. Yau et E. Zaslow, *From special Lagrangian to Hermitian-Yang-Mills via Fourier-Mukai transform*, Adv. Theor. Math. Phys. **4**, 1319–1341 (2002), math.dg/0005118.
- [MM97] R. Minasian et G. Moore, *K-theory and Ramond-Ramond charge*, JHEP **11**, 002 (1997), hep-th/9710230.
- [MMMS00] M. Mariño, R. Minasian, G. Moore et A. Strominger, *Nonlinear instantons from supersymmetric p-branes*, JHEP **01**, 005 (2000), hep-th/9911206.
- [MS00] S. Mukhi et N. Suryanarayana, *Chern–Simons terms on noncommutative branes*, JHEP **11**, 006 (2000), hep-th/0009101.
- [MS01] S. Mukhi et N. Suryanarayana, *Gauge-invariant couplings of noncommutative branes to Ramond–Ramond backgrounds*, JHEP **05**, 023 (2001), hep-th/0104045.
- [MS02] S. Mukhi et N. Suryanarayana, *Open-string actions and noncommutativity beyond the large-B limit*, JHEP **11**, 002 (2002), hep-th/0208203.
- [MSZ85] J. Manes, R. Stora et B. Zumino, *ALGEBRAIC STUDY OF CHIRAL ANOMALIES*, Commun. Math. Phys. **102**, 157 (1985).
- [MT02] R. Minasian et A. Tomasiello, *Variations on stability*, Nucl. Phys. **B631**, 43–65 (2002), hep-th/0104041.

- [Muk02] S. Mukhi, *Star products from commutative string theory*, *Pramana* **58**, 21–26 (2002), hep-th/0108072.
- [MV91] K. A. Meissner et G. Veneziano, *Manifestly  $O(d,d)$  invariant approach to space-time dependent string vacua*, *Mod. Phys. Lett.* **A6**, 3397–3404 (1991), hep-th/9110004.
- [MVR500] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk et N. Seiberg, *Noncommutative perturbative dynamics*, *JHEP* **02**, 020 (2000), hep-th/9912072.
- [Mye99] R. Myers, *Dielectric-branes*, *JHEP* **12**, 022 (1999), hep-th/9910053.
- [Oku01] K. Okuyama, *Noncommutative tachyon from background independent open string field theory*, *Phys. Lett.* **B499**, 167–173 (2001), hep-th/0010028.
- [OO01] Y. Okawa et H. Ooguri, *An exact solution to Seiberg-Witten equation of non-commutative gauge theory*, *Phys. Rev.* **D64**, 046009 (2001), hep-th/0104036.
- [OOY96] H. Ooguri, Y. Oz et Z. Yin, *D-branes on Calabi-Yau spaces and their mirrors*, *Nucl. Phys.* **B477**, 407–430 (1996), hep-th/9606112.
- [Pol95] J. Polchinski, *Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges*, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4724–4727 (1995), hep-th/9510017.
- [Pol96] J. Polchinski, *Lectures on D-branes*, (1996), hep-th/9611050.
- [Pol98] J. Polchinski, *String theory*, volume 1, 2, Cambridge University Press, 1998.
- [PS05a] T. Pantev et E. Sharpe, *Notes on gauging noneffective group actions*, (2005), hep-th/0502027.
- [PS05b] T. Pantev et E. Sharpe, *String compactifications on Calabi-Yau stacks*, (2005), hep-th/0502044.
- [PW05] V. Pestun et E. Witten, *The Hitchin functionals and the topological B-model at one loop*, (2005), hep-th/0503083.
- [Qui85] D. Quillen, *Superconnections and the Chern character*, *Topology* **24**, 89–95 (1985).
- [RS03] D. Robbins et S. Sethi, *The UV/IR interplay in theories with space-time varying non-commutativity*, *JHEP* **07**, 034 (2003), hep-th/0306193.
- [Sch99] V. Schomerus, *D-branes and deformation quantization*, *JHEP* **06**, 030 (1999), hep-th/9903205.
- [Sen99a] A. Sen, *Descent relations among bosonic D-branes*, *Int. J. Mod. Phys.* **A14**, 4061–4078 (1999), hep-th/9902105.
- [Sen99b] A. Sen, *Non-BPS states and branes in string theory*, (1999), hep-th/9904207.
- [Ser70] J.-P. Serre, *Cours d’arithmétique*, P.U.F., 1970.
- [Sha94] S. Shatashvili, *On the problems with background independence in string theory*, *Alg. Anal.* **6**, 215–226 (1994), hep-th/9311177.
- [SW99] N. Seiberg et E. Witten, *String theory and noncommutative geometry*, *JHEP* **09**, 032 (1999), hep-th/9908142.
- [SYZ96] A. Strominger, S.-T. Yau et E. Zaslow, *Mirror symmetry is T-duality*, *Nucl. Phys.* **B479**, 243–259 (1996), hep-th/9606040.

- [Tho] R. Thomas, *Moment maps, monodromy and mirror manifolds*, math.DG/0104196.
- [Vaf98] C. Vafa, *Extending mirror conjecture to Calabi-Yau with bundles*, (1998), hep-th/9804131.
- [vE01] C. van Enckevort, *Note on mirror symmetry and coisotropic D-branes on tori*, (2001), hep-th/0111043.
- [Wit82] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, J. Diff. Geom. **17**, 661–692 (1982).
- [Wit86] E. Witten, *Noncommutative geometry and string field theory*, Nucl. Phys. **B268**, 253 (1986).
- [Wit88] E. Witten, *Topological Gravity*, Phys. Lett. **B206**, 601 (1988).
- [Wit91] E. Witten, *Mirror manifolds and topological field theory*, (1991), hep-th/9112056.
- [Wit98] E. Witten, *D-branes and K-theory*, JHEP **12**, 019 (1998), hep-th/9810188.
- [Wit00] E. Witten, *Noncommutative tachyons and string field theory*, (2000), hep-th/0006071.
- [Wit01] E. Witten, *Overview of K-theory applied to strings*, Int. J. Mod. Phys. **A16**, 693–706 (2001), hep-th/0007175.
- [Wyl01] N. Wyllard, *Derivative corrections to D-brane actions with constant background fields*, Nucl. Phys. **B598**, 247–275 (2001), hep-th/0008125.
- [Zab89] A. V. Zabrodin, *Nonarchimedean strings and Bruhat–Tits trees*, Commun. Math. Phys. **123**, 463 (1989).
- [Zha88] R.-B. Zhang, *Lagrangian formulation of open and closed  $p$ -adic strings*, Phys. Lett. **B209**, 229 (1988).
- [Zum] B. Zumino, *Chiral Anomalies and differential geometry*, Lectures given at Les Houches Summer School on Theoretical Physics, Les Houches, France, Aug 8 - Sep 2, 1983.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Des cordes aux D-branes . . . . .	3
1.2	Charges de Ramond–Ramond et champs de jauge . . . . .	4
1.3	Géométries . . . . .	7
1.4	Plan de ce mémoire . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Des conditions de bord aux D-branes topologiques</b>	<b>13</b>
2.1	Les D-branes sont requises par la T-dualité . . . . .	13
2.2	Cordes ouvertes dans un champ électromagnétique . . . . .	16
2.3	Propagateurs et mélanges Neumann–Dirichlet . . . . .	18
2.4	Cordes topologiques . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Théories de jauge non-commutatives sur les D-branes</b>	<b>25</b>
3.1	Théorie de jauge non-commutative et symétrie de dualité . . . . .	25
3.2	L’action de Dirac–Born–Infeld comme action effective de la théorie des cordes .	30
3.3	Point de vue non-commutatif sur l’action de Born–Infeld . . . . .	32
3.4	Couplages de Ramond–Ramond . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Corrections dérivatives</b>	<b>39</b>
4.1	Les star-produits modifiés, leur origine non-commutative . . . . .	39
4.2	Corrections dérivatives aux actions effectives . . . . .	40
4.3	Prédictions non-commutatives . . . . .	42
4.4	Calcul en théorie (commutative) des cordes . . . . .	43
4.5	Au-delà de la limite de Seiberg–Witten . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Tachyons, actions effectives et transitions de phase</b>	<b>51</b>
5.1	Motivation . . . . .	51
5.2	Non-commutativité et condensation de tachyons . . . . .	52
5.3	Un <i>toy model</i> : les cordes $p$ -adiques . . . . .	53
5.4	Dictionnaire pour l’évaluation de l’action effective pour les scalaires . . . . .	57
5.5	Tachyons non-commutatifs et superconnexion . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Modèle topologique B</b>	<b>63</b>
6.1	D-branes : surface d’univers et espace-temps . . . . .	63
6.2	Conditions de bord et structures complexes . . . . .	64
6.3	Condition de stabilité . . . . .	66
6.4	Non-commutativité et holomorphie . . . . .	67



6.5	Vers la géométrie complexe généralisée . . . . .	68
<b>7</b>	<b>Symétrie miroir en présence de D-branes</b>	<b>71</b>
7.1	Argument de Strominger–Yau–Zaslow : fibration en tores $T^3$ . . . . .	71
7.2	Spineurs purs . . . . .	72
7.3	Inclusion de D-branes . . . . .	73
7.4	Des A-branes spéciales lagrangiennes aux B-branes . . . . .	74
7.5	Réduction symplectique et appariements à la Atiyah–Bott . . . . .	77
7.6	T-dualité et symétrie-miroir . . . . .	80
<b>8</b>	<b>Conclusions et problèmes ouverts</b>	<b>85</b>
8.1	Actions effectives de cordes ouvertes . . . . .	85
8.2	D-branes topologiques et symétrie miroir . . . . .	86
	<b>Bibliographie</b>	<b>89</b>
	<b>Table des matières</b>	<b>95</b>